

تحليل رياضي لتوزيع بيتا وتطبيقاته في معالجة الإشارات الكهربائية العشوائية

. كلثوم محمد الوراصل^{*} ، خديجة ابوبكر خشيبة ، ريم غيث أبوزويدة

¹ المواد العامة، كلية التقنية الهندسية/جنزور ، طرابلس، البيضاء

² المواد العامة، المعهد العالي للتقنيات الهندسية / طرابلس ، طرابلس ليبية

³المواد العامة ، المعهد العالي للتقنيات الهندسية / طرابلس ، طرابلس ليبية

ksheba01@gmail.com kwkakwka36@gmail.com *

Received: 30-09-2025; Revised: 10-10-2025; Accepted: 31-10-2025; Published: 25-11-2025

الملخص:

.. تناول هذا البحث دراسة متعمقة لدالة بيتا وتوزيع بيتا، وهما من الأدوات الرياضية الأساسية ذات الاستخدامات الواسعة في الإحصاء والرياضيات التطبيقية. يرتبط توزيع بيتا ارتباطاً مباشرًا بدالة بيتا، ويستخدم بشكل كبير في النمذجة الإحصائية، خاصةً في الحالات التي تتطلب توصيًّا لاحتمالات متغيرة ضمن نطاق محدود. في مجال الهندسة الكهربائية، تبرز أهمية هذه التوزيعات في تحليل الإشارات العشوائية، حيث تُستخدم لتقدير جودة الإشارة، تقييم أداء الأنظمة، وتحسين أدائها. يركز البحث على العلاقة الرياضية بين دالة بيتا وتوزيع بيتا، ويستعرض كيفية توظيف هذه العلاقة في معالجة الإشارات الكهربائية التي تتسم بالعشوائية. كما يناقش البحث تطبيقات عملية تشمل تصميم مرشحات احتمالية قادرة على التكيف مع خصائص الإشارة، وتقدير احتمالية الخطأ في أنظمة الإرسال، مما يسهم في تعزيز كفاءة الاتصالات وتقليل معدلات الخطأ. تُظهر النتائج أن استخدام توزيع بيتا في تحليل الإشارات يوفر مرونة عالية في النمذجة، ويساعد في تحسين دقة التقديرات الإحصائية، خاصةً في البيئات التي تتسم بمتغيرات عالية وظروف غير منتظمة. كما أن دمج هذه الأدوات في تصميم الأنظمة يفتح آفاقًا جديدة لتطوير تقنيات أكثر ذكاءً واستجابةً للظروف التشغيلية المتغيرة. يسلط البحث الضوء على أهمية الربط بين النظرية الرياضية والتطبيقات الهندسية، ويؤكد على الدور الحيوي لدالة بيتا وتوزيع بيتا في تطوير حلول فعالة لمعالجة الإشارات وتحسين أداء الأنظمة المعتمدة على البيانات العشوائية.

الكلمات المفتاحية: دالة ، توزيع ، كثافة ، إشارة ، ضوابط ، نمذجة ، معالجة ..).

Abstract:

function and the Beta distribution, both of which play a crucial role in applied mathematics and statistical modeling. The Beta distribution is directly derived from the Beta function and is widely used in statistical applications that require modeling probabilities within a bounded interval. In electrical engineering, probability distributions are essential tools for analyzing random systems and signal processing, particularly in addressing challenges related to noise, signal quality, and statistical estimation. The study focuses on the mathematical relationship between the Beta

function and the Beta distribution, highlighting their relevance in analyzing stochastic electrical signals. By leveraging these functions, engineers can model uncertainty, optimize signal performance, and enhance the reliability of communication systems. The research also presents practical applications, including the design of probabilistic filters, estimation of transmission error probabilities, and performance enhancement in communication networks. Findings indicate that the Beta distribution offers high flexibility in modeling signal behavior under varying noise conditions, making it a valuable tool for improving statistical accuracy in signal analysis. Its adaptability allows for more precise error

estimation and better filter design, which are critical in modern communication systems where data integrity and transmission efficiency are paramount. Moreover, the integration of Beta-based models into signal processing frameworks demonstrates a promising approach to bridging theoretical mathematics with real-world engineering challenges. This synergy not only improves system performance but also opens new avenues for developing intelligent, adaptive technologies capable of responding to dynamic environments. In conclusion, the Beta function and distribution serve as powerful analytical tools in electrical engineering, offering robust solutions for signal modeling, error prediction, and system optimization in stochastic settings.

Keywords: Distribution.Signal.Noise.FunctionDensity.Model[ng; Processing;].

مقدمة :

تعد الدوال الخاصة من أبرز الأدوات الرياضية التي أسهمت بشكل جوهري في تطور العلوم التطبيقية، إذ تُستخدم في حل العديد من المسائل الهندسية والفيزيائية المعقدة. وتأتي دالة بيتا في مقدمة هذه الدوال، نظراً لارتباطها الوثيق بدالة غاما، ولأنها تشكل الأساس الرياضي لتوزيع بيتا الاحتمالي [11]، الذي يُستخدم على نطاق واسع في النمذجة الإحصائية، خصوصاً في مجال معالجة الإشارات والاتصالات تبرز الحاجة في هذا المجال إلى أدوات رياضية وإحصائية دقيقة لتحليل الإشارات ذات الطبيعة العشوائية والمتأثرة بالضوضاء، ووصف سلوكها بطريقة منهجية. وينبع توزيع بيتا نموذجاً احتمالياً مرجحاً، قادرًا على تمثيل العديد من الظواهر انطلاقاً من هذه (Bit Error Rate) العشوائية، مما يمنحه أهمية خاصة في تقدير معدل الخطأ في الإرسال الأهمية، يسعى هذا البحث إلى استكشاف العلاقة الرياضية بين دالة بيتا وتوزيع بيتا، وتسلیط الضوء على تطبيقاتهما العملية في معالجة الإشارات الكهربائية. كما يهدف إلى إبراز دورهما الحيوي في تحسين دقة النماذج الاحتمالية، وتطوير تقنيات الاتصالات الحديثة، بما في ذلك تصميم المرشحات وتقليل تأثير الضوضاء الإطار النظري والرياضي لدالة بيتا وتوزيع بيتا:

دالة بيتا: التعريف والخصائص الرياضية :

تعد دالة بيتا من الدوال التكاملية الخاصة التي تحظى بأهمية كبيرة في التطبيقات الإحصائية والاحتمالية، نظرًا لقدرتها على تمثيل سلوكيات رياضية معقدة. تُعرف دالة بيتا رياضيًّا وفقًا للتكميل التالي

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

هـما معـامـلاتـ الشـكـلـ . $\alpha, \beta > 0$ حيث أنـ : -

- الدالة معرفة فقط عندما تكون القيم موجبة.

- ترتبط دالة بيتا ارتباطاً وثيقاً بدالة جاما ويمكن التعبير عنها باستخدام العلاقة :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

وهذا الرابط يجعلها أداة فعالة في تبسيط العديد من العمليات الرياضية المعقدة خاصة في مجال توزيع الاحتمالات ، حيث تُستخدم لتطبيع دوال الكثافة الاحتمالية وضمان تكاملها الكلي.

توزيع بيتا : المفهوم والخصائص الاحصائية:

توزيع بيتا هو توزيع احتمالي مستمر يستخدم في لمحة المتغيرات العشوائية المحسوبة بين 0 و 1. مثل نسب النجاح أو احتمالية وقوع حدث معين . يُعرف توزيع بيتا بدالة الكثافة الاحتمالية ::

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{\beta(\alpha, \beta)}, 0 \leq t \leq 1 \quad \text{حيث:}$$

هـما معـامـلاتـ التـوزـيعـ . $\alpha, \beta > 0$

هـما دـالـةـ بـيـتاـ . $\beta(\alpha, \beta)$

$$\mu = \text{المتوسط الحسابي:} \quad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

ظهر هذه الخصائص مدى مرونة توزيع بيتا في تمثيل سلوكيات مختلفة للبيانات، حسب قيم المعاملين .

- **أهمية توزيع بيتا في النمذجة الاحتمالية:** يمتاز توزيع بيتا بقدرته على تمثيل مجموعة واسعة من الأشكال الاحتمالية، مثل : التوزيع المتماثل عندما تكون ($\alpha = \beta$) التوزيع المنحاز نحو الصفر أو الواحد (عندما تختلف القيم بشكل كبير) وهذا يجعله مثالياً لنمذجة الظواهر التي تتطلب تمثيلاً دقيقاً لاحتمالية وقوع قيم ضمن نطاق محدود، مثل تقدير احتمالية الخطأ (BER-Bit Error Rate) يمكن استخدام توزيع بيتا لوصف احتمال الخطأ عند الإرسال عبر قناة مشوشة .

- **فلترة الضوضاء :** يتم تعديل معاملات بيتا لتقليل تأثير التشويش على الإشارة ، خصوصاً في الإشارات الرقمية .

- نمذجة سلوك الإشارات المشوهة : يمكن تصور السلوك الاحتمالي للإشارة كنموذج بيتا مما يسهل تحليل احتمالية وقوع قيم معينة
 - علاقة بين دالة بيتا وتوزيع بيتا : تعد دالة بيتا الأساس الرياضي الذي تبني عليه دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بيتا. فهي تُستخدم في المقام لتبسيط التوزيع، مما يضمن أن التكامل الكلي للكثافة الاحتمالية يساوي 1. هذا التكامل بين الدالة والتوزيع يمكن الباحثين من استخدام أدوات رياضية دقيقة لتحليل الإشارات العشوائية، وتقدير احتمالية وقوع أحداث معينة ضمن بيئه مشوهة أو غير مستقرة.
 - استخدام توزيع بيتا في معالجة الإشارات الكهربائية :
 - تعريف الإشارة الكهربائية :
 - الإشارة الكهربائية هي موجة كهربائية تتغير مع الزمن ، ويمكن أن تكون مستمرة أو متقطعة . وتستخدم لتمثيل الصوت ، الصورة، البيانات ، أو أي نوع من المعلومات .
 - أنواع الإشارات الكهربائية: تنقسم الإشارات إلى نوعين رئисين :
 - إشارات تماثلية: (**Analog**) : تتغير بشكل مستمر مثل الصوت أو الجهد الكهربائي .
- أشارات رقمية (Digital)** : تتخذ قيمها محددة (0 و 1) وتستخدم في الحوسبة والاتصالات الرقمية . زتحل الإشارات باستخدام أدوات رياضية مثل تحويل فورييه ، تحويل لا بلاس والنمدجة الاحتمالية. في أنظمة الاتصالات الرقمية يعد تقدير معدل الخطأ في الارسال من المؤشرات الأساسية لتقدير جودة القناة . يمكن استخدام توزيع بيتا لنمدجة احتمالية وقوع خطأ في الارسال ، خاصة في القنوات التي تتأثر بالضوضاء ، أو ، يمكن تمثيل سلوك القناة بدقة ، وتحديد مدى احتمالية وقوع α, β التداخل ، من خلال ضبط معامل التوزيع أخطاء في نطاق معين من الإشارة

الضوضاء: هي إشارات غير مرغوب فيها تؤثر على جودة الإشارة الأصلية في الأنظمة الكهربائية والاتصالات تشمل أنواع الضوضاء :

ضوضاء حرارية (Thermal Nois) ضوضاء النبضات (Impulse Nois) ضوضاء غاويسية (Gaussian Nois) مثل الضوضاء المنحرفة أو المحدودة (

تصميم المرشحات الاحتمالية:

تستخدم المرشحات الاحتمالية في تقليل تأثير الضوضاء على الإشارة خصوصا في البيئات ذات التشويش العالي . عند استخدام توزيع بيتا كأساس لتصميم هذه المرشحات ، يمكن تعديل شكل التوزيع ليتناسب مع خصائص الإشارة المراد تحسينها مما يسمح بفلترة أكثر دقة وفعالية .

-نمذجة سلوك الإشارات العشوائية :

الاشارات الكهربائية غالباً ما تكون ذات طبيعة عشوائية ، خاصة في الانظمة الاسلكية أو البيئات الصناعية. يمكن استخدام توزيع بيتا كنموذج إحصائي لتمثيل هذه الاشارات ، مما يسهل تحليلاها وتوقع سلوكها في ظروف مختلفة ، على سبيل المثال ، يمكن نمجة توزيع الطاقة أو التردد ضمن نطاق معين باستخدام بيتا مما يساعد في تحسين أداء النظام وتحديد نقاط الضعف .

- تحليل مرونة توزيع بيتا :
 - يوفر توزيع بيتا مرونة كبيرة في تمثيل البيانات حيث يمكنه أن يكون متماثلاً أو منحازاً نحو أحد الاطراف
 - حسب قيم α, β , هذا يسمح بتكيف النموذج الاحتمالي وفقاً لطبيعة الاشارة او النظام سواء كانت الاشارة تمثل الى القيم المنخفضة او المرتفعة .
 - أمثلة : جدول قيم دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) لتوزيع بيتا:

| t | PDF $PDF(\alpha = 2, \beta = 5)$ | $PDF(\alpha = 5, \beta = 2)$ |
|----------|---|------------------------------|
| 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.1 | 1.46 | 0.12 |
| 0.2 | 2.62 | 0.48 |
| 0.3 | 3.16 | 1.08 |
| 0.4 | 2.90 | 1.92 |
| 0.5 | 2.34 | 3.90 |
| 0.6 | 1.64 | 3.36 |
| 0.7 | 1.06 | 3.00 |
| 0.8 | 0.56 | 2.04 |
| 0.9 | 0.20 | 0.72 |

يوضح الجدول (1) كيف يتغير شكل النوزيع حسب معاملات

$$\alpha, \beta$$

$$\beta1 := 5 \quad \alpha1 := 2$$

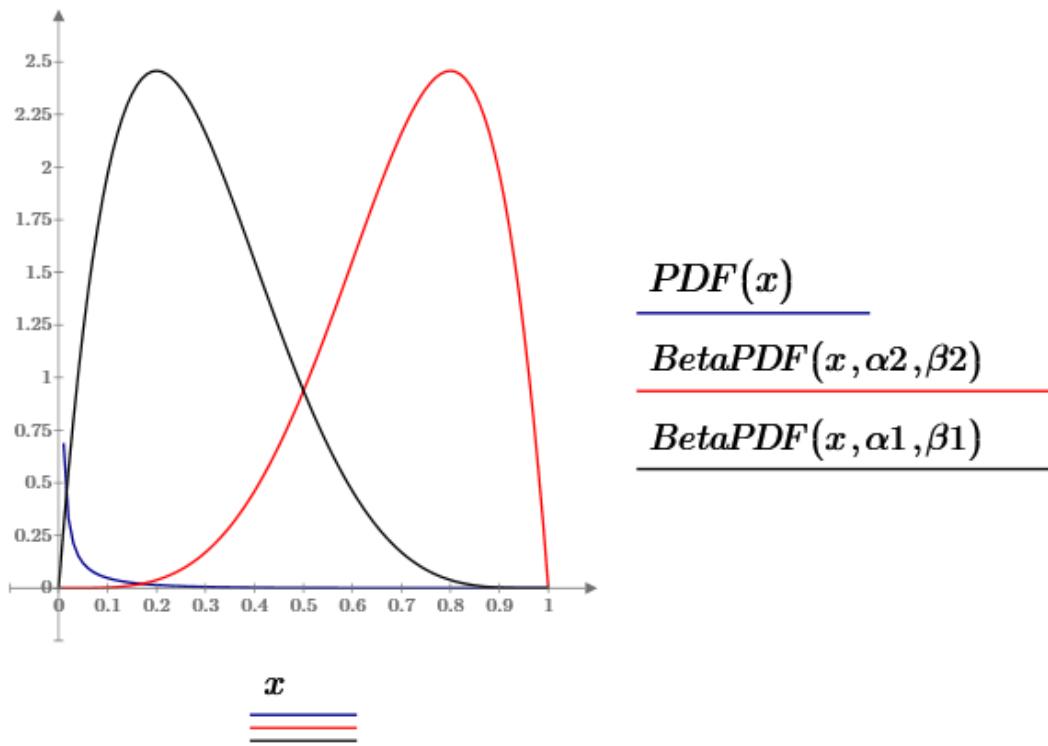
$$BetaPDF1(x, \alpha, \beta) := \frac{\left((x)^{(\alpha1 - 1) * (1 - x)} \right)^{(\beta1 - 1)}}{\beta(\alpha1, \beta1)}$$

$$B(\alpha, \beta) := \Gamma(\alpha) \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

$$BetaPDF2(x, \alpha, \beta) := \frac{\left((x)^{(\alpha2 - 1) * (1 - x)} \right)^{(\beta2 - 1)}}{\beta(\alpha2, \beta2)}$$

$$x := 0, 0.01..1 \quad PDF(x, \alpha1, \beta1)$$

مقارنة بين توزيعين مختلفين لدالة بيتا :



الشكل البياني يبين (1) مقارنة بين توزيعين مختلفين لدالة بيتا :

على شكل دالة الكثافة الاحتمالية β, α , يوضح الرسم البياني لتوزيع بيتا كيف تؤثر مجاملات التوزيع يظهر التوزيع منحرفا نحو اليسار، مما غير المستقرة يدل على أن القيم $\alpha = 2, \beta = 5$ عند اختيار القيم الصغيرة ل x أكثر احتمالا. هذا الشكل يعكس سلوك الإشارات التي تتعرض لتشویش كبير في بدايات الارسال

يصبح التوزيع منحرفا نحو اليمين مما ($\alpha = 5, \beta = 2$) ويستخدم في نمجة القنوات. في المقابل عند اختيار يعني أن القيم الكبيرة ل X هي الأكثر احتمالاً هدا الشكل يستخدم في نمجة الإشارات ذات الجودة العالية ، حيث يكون احتمال الخطأ منخفضاً في معظم مراحل الارسال. تبرز هذه المقارنة مرونة توزيع بيتا مرونة توزيع بيتا في تمثيل أنواع مختلفة من البيانات والاسارات العشوائية وتؤكد أهمية اختيار معاملات التوزيع بدقة عند تصميم أنظمة الاتصالات أو المرشحات الاحصائية ، بهدف تحسين الاداء وتقليل تأثير الموضوعات .

مثال : على توزيع بيتا في تقدير احتمالية الخطأ:

افرض ان لدينا قناة اتصال رقمية يتأثر فيها استقبال البيانات بالمواضيع ، في هذه القناة احتمال ان يستقبل البث بشكل صحيح ليس ثابتاً متغير عشوائي بين 0 و 1 .

لنفترض ان هذا المتغير العشوائي (نسبة النجاح) يتبع توزيع بيتا بالمعلمات:

$$X \sim Beta (\alpha = 3, \beta = 7)$$

احتمالية الخطأ لبث الواحد تساوي :

$$P_e = 1 - P_{success}$$

متغير عشوائي فان $P_{success}$ وبما ان

$P_e = 1 - X$ ، والحساب الاحصائي القيمة المتوقعة (المتوسط) لتوزيع بيتا هي:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{3}{3+7} & E[X] &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

ادن متوسط احتمال النجاح = 0.3 اي 30% وبما ان :

$$E[P_e] = 1 - E[X]$$

$$E[P_e] = 1 - 0.3 = 0.7$$

ادن استخدام توزيع بيتا لوصف متغير النجاح نحصل على ان :

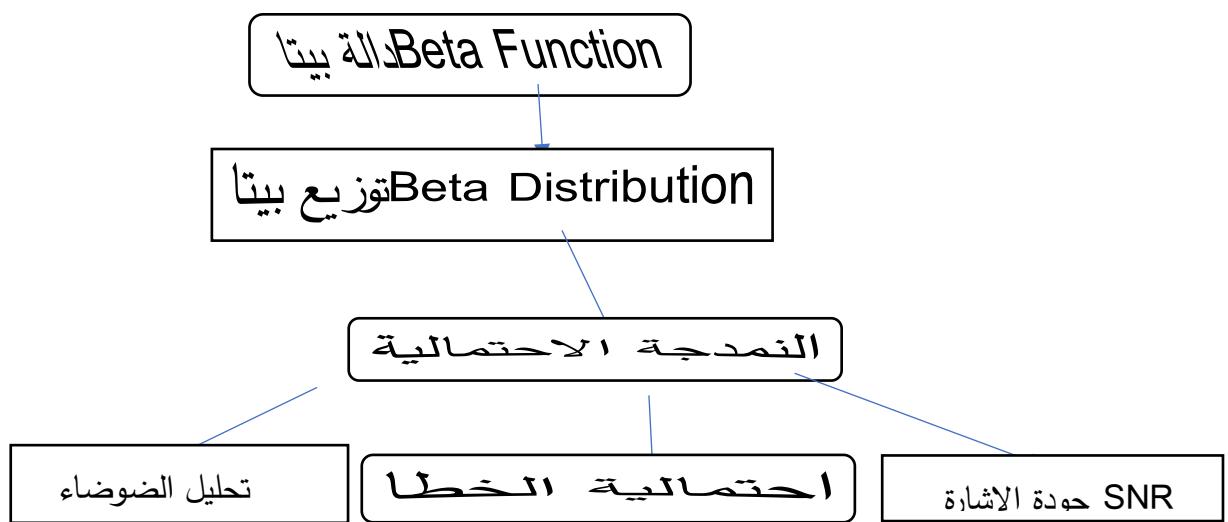
$P_e = 70\%$ احتمالية الخطأ المتوقعة في هذه القناة تساوي تقريباً :

هذا المثال يوضح كيف يمكن استخدام توزيع بيتا لنمجة التباين في احتمالية استقبال البيانات بشكل صحيح ، ومن تم تقدير متوسط احتمالية الخطأ ، هذه الطريقة مفيدة خصوصاً في القنوات ذات التلاشي او القنوات الاسلكية حيث تكون نسب النجاح غير ثابتة بل عشوائية.

مخطط البياني يوضح العلاقة بين:

دالة بيتا - توزيع بيتا - التطبيقات في الهندسة الكهربائية مثل تحليل المواضيع ، احتمالية

الخطأ وجودة الاشارة (BER (SNR)



من خلال استخدام توزيع بيتا في نمذجة الإشارات الكهربائية ذات الطابع العشوائي ، تم التوصل الى فعالية هذا التوزيع في تمثيل سلوك الإشارة في بيانات مشوشفة ، عند تطبيق توزيع بيتا بمعاملات مختلفة (لوحظ أن شكل التوزيع يتغير بشكل واضح ، مما يسمح بتمثيل الإشارات التي يمكن تمثيل الي القيم الصغيرة أو الكبيرة حسب طبيعة النظام ، كما أظهرت النتائج أنه يمكن استخدام توزيع بيتا لتقدير الخطأ في الإرسال بدقة خاصة في القنوات التي تتأثر بالضوضاء ، عند ضبط المعاملات بشكل مناسب يمكن تمثيل احتمالية الخطأ ضمن نطاق معين مما يساعد في تحسين اداء انظمة الاتصالات ، كما أنه تم اختيار تصميم مرشحات تعتمد على توزيع بيتا ، وتشير النتائج أن هذه المرشحات قادرة على تقليل تأثير الضوضاء خصوصا في الإشارات الرقمية. يسمح التعديل الديناميكي لمعاملات التوزيع بتكييف المرشح مع خصائص الإشارة ، مما يعزز من جودة الإشارة المستقبلية ويقلل التشوش . وأبرزت النتائج مرونة توزيع بيتا في تمثيل أنواع متعددة من الإشارات سواء كانت متماثلة أو منحازة ، هذه المرونة تجعله أداة قوية في تحليل الإشارات العشوائية، وتفتح افاق جديدة في مجال الاتصالات والتحكم.

النوصيات : - في ضوء ما تم استعراضه وتحليله في هذه الدراسة، يمكن تقديم التوصيات التالية لتعزيز الاستفادة من دالة بيتا وتوزيعها في مجال تحليل الإشارات الكهربائية.

- توسيع استخدام توزيع بيتا في نمذجة الإشارات العشوائية المعقدة .
- البحث في استخدام دوال بيتا مع دوال جاما في تصميم خوارزميات لتقدير الضوضاء اوتوقع الإشارات المستقبلية .
- تطوير نماذج احتمالية باستخدام دالة بيتا لتقدير موثوقية مكونات الشبكة ، توقع الاعطال وتحسين ادارة الطاقة المتعددة .
- إجراء دراسات مقارنة بين توزيع بيتا وتوزيعات أخرى لتحديد الأنسب لمختلف التطبيقات.
- إدراج موضوع دالة بيتا وتوزيعها في المناهج التعليمية لطلبة الهندسة الكهربائية كأداة تحليلية مهمة .

- تشجيع التعاون البحثي بين التخصصات يُتيح بتعزيز التعاون بين الباحثين في مجالات الرياضيات التطبيقية والهندسة الكهربائية لتطوير نماذج تحليلية أكثر تكاملاً تعتمد على دالة بيتو في توصيف الأنظمة العشوائية .
- يوصى بتصميم نماذج برمجية متقدمة تتيح استخدام دالة بيتو وتوزيعها في تحليل البيانات الهندسية ، مما يسهل تطبيقها في البيئات الصناعية والبحثية .

خاتمة:

في هذا البحث تم تسلیط الضوء على العلاقة الرياضية بين دالة بيتو ، واستعراض أهميتها في النمذجة الاحتمالية ومعالجة الإشارات الكهربائية ذات الطابع العشوائي .

أظهرت الدراسة أن توزيع بيتو يعد نموذجاً مرجحاً وفعالاً في تمثيل السلوك الاحتمالي للإشارات ، خاصة في البيئات التي تتأثر بالضوضاء والتشویش . كما أثبتت التطبيقات العملية أن استخدام هذا التوزيع يسهم في تحسين أداء أنظمة الاتصالات ، من خلال تقدير معدل الخطأ بدقة وتصميم مرشحات قادرة على تقليل نأثير الضوضاء . إن مرونة توزيع بيتو ، وقدرته على التكيف مع طبيعة الإشارة ، يجعلان منه أداة رياضية وإحصائية واعدة في تطوير تكنولوجيات الاتصال الحديثة ، وتحسين جودة الإشارة في الأنظمة الرقمية

وتفتح هذه النتائج المجال أمام المزيد من الأبحاث المستقبلية ، التي يمكن أن تتناول دمج توزيع بيتو مع تكنولوجيات الدكاء الاصطناعي ، أو استخدامه في تحليل الإشارات الحيوية والطبية أو في تصميم أنظمة اتصالات أكثر كفاءة واستقرارا.

المراجع: المراجع باللغة الانجليزية :

- Haykin, S. (2001) . Communication Systems. Wiley. .1
- . Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (1972) .2.
- Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables Dover Publications
- . Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (2014).3
- Table of Integrals, Series, and Products Academic Press
- Johnson, N. L., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1995)
- . Continuous Univariate Distributions, Volume 2
- Wiley–Interscience

. Feller, W. (1968). . 5

An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1

Wiley

. Patel, J. K., & Read, C. B. (1996.)

. 6

Handbook of the Normal Distribution and Related Distributions

CRC Press

Papoulis , A ., & Pillai, S . U . (2002). . 7

Probabilty , Random Variables and Stochastic processes. McGraw.Hill.

مراجع باللغة العربية

- 8- محمد زغلول، (2002). الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية. دار المريخ للنشر
 - 9- أحمد عبدالله ، (2020) . التحليل الاحصائي للإشارات الكهربائية . دار النشر الجامعي .
 - 10- عبد الله، محمد (2010). الأسس الرياضية في الإحصاء وتطبيقاتها. مكتبة الأنجلو المصرية
 - 11- - محمد س . (2021) . المرشحات الاحتمالية وتطبيقاتها في الاتصالات الرقمية. المجلة العربية للهندسة الكهربائية.
 - 12- الشناوي ، عبد الفتاح (2008) الاحتمالات والاحصاء وتطبيقاتهما في الهندسة الكهربائية ، مكتبة الانجلو المصرية. - الزعبي ، محمد حسن ، (2012) مدخل الي نظرية الاشارات والانظمة ، دار وائل للنشر الاردن.
- 13
- 14- محمد، خالد عبد العزيز ، (2010) ، معالجة الاشارات الرقمية ، دار الفكر العربي ، القاهرة .