

تحليل رياضي لتوزيع بيتا وتطبيقاته في معالجة الإشارات الكهربائية العشوائية

. كلثوم محمد البوراص* ، خديجة ابوبكر خشبية ، ريم غيث أبوزويدة

¹ المواد العامة، كلية التقنية الهندسية/جنزور ، طرابلس، ليبيا

² المواد العامة، المعهد العالي للتقنيات الهندسية / طرابلس ، طرابلس ليبيا

³المواد العامة، المعهد العالي للتقنيات الهندسية / طرابلس ، طرابلس ليبيا

ksheba01@gmail.com

kwkakwka36@gmail.com*

Received: 30-09-2025; Revised: 10-10-2025; Accepted: 31-10-2025; Published: 25-11-2025

المخلص:

.. تناول هذا البحث دراسة متعمقة لدالة بيتا وتوزيع بيتا، وهما من الأدوات الرياضية الأساسية ذات الاستخدامات الواسعة في الإحصاء والرياضيات التطبيقية. يرتبط توزيع بيتا ارتباطاً مباشراً بدالة بيتا، ويستخدم بشكل كبير في النمذجة الإحصائية، خاصة في الحالات التي تتطلب توصيفاً لاحتمالات متغيرة ضمن نطاق محدود. في مجال الهندسة الكهربائية، تبرز أهمية هذه التوزيعات في تحليل الإشارات العشوائية، حيث تُستخدم لتقييم جودة الإشارة، وتقدير الضوضاء، وتحسين أداء الأنظمة يركز البحث على العلاقة الرياضية بين دالة بيتا وتوزيع بيتا، ويستعرض كيفية توظيف هذه العلاقة في معالجة الإشارات الكهربائية التي تتسم بالعشوائية. كما يناقش البحث تطبيقات عملية تشمل تصميم مرشحات احتمالية قادرة على التكيف مع خصائص الإشارة، وتقدير احتمالية الخطأ في أنظمة الإرسال، مما يسهم في تعزيز كفاءة الاتصالات وتقليل معدلات الخطأ. تُظهر النتائج أن استخدام توزيع بيتا في تحليل الإشارات يوفر مرونة عالية في النمذجة، ويساعد في تحسين دقة التقديرات الإحصائية، خاصة في البيئات التي تتسم بتقلبات عالية وضوضاء غير منتظمة. كما أن دمج هذه الأدوات في تصميم الأنظمة يفتح آفاقاً جديدة لتطوير تقنيات أكثر ذكاءً واستجابة للظروف التشغيلية المتغيرة يسلط البحث الضوء على أهمية الربط بين النظرية الرياضية والتطبيقات الهندسية، ويؤكد على الدور الحيوي لدالة بيتا وتوزيع بيتا في تطوير حلول فعالة لمعالجة الإشارات وتحسين أداء الأنظمة المعتمدة على البيانات العشوائية

الكلمات المفتاحية: دالة ، توزيع، كثافة ، إشارة ، ضوضاء ، نمذجة ، معالجة ..).

Abstract:

function and the Beta distribution, both of which play a crucial role in applied mathematics and statistical modeling. The Beta distribution is directly derived from the Beta function and is widely used in statistical applications that require modeling probabilities within a bounded interval. In electrical engineering, probability distributions are essential tools for analyzing random systems and signal processing, particularly in addressing challenges related to noise, signal quality, and statistical estimation. The study focuses on the mathematical relationship between the Beta

function and the Beta distribution, highlighting their relevance in analyzing stochastic electrical signals. By leveraging these functions, engineers can model uncertainty, optimize signal performance, and enhance the reliability of communication systems. The research also presents practical applications, including the design of probabilistic filters, estimation of transmission error probabilities, and performance enhancement in communication networks. Findings indicate that the Beta distribution offers high flexibility in modeling signal behavior under varying noise conditions, making it a valuable tool for improving statistical accuracy in signal analysis. Its adaptability allows for more precise error

estimation and better filter design, which are critical in modern communication systems where data integrity and transmission efficiency are paramount. Moreover, the integration of Beta-based models into signal processing frameworks demonstrates a promising approach to bridging theoretical mathematics with real-world engineering challenges. This synergy not only improves system performance but also opens new avenues for developing intelligent, adaptive technologies capable of responding to dynamic environments. In conclusion, the Beta function and distribution serve as powerful analytical tools in electrical engineering, offering robust solutions for signal modeling, error prediction, and system optimization in stochastic settings.

Keywords: Distribution.Signal.Noise.FunctionDensity.Model[ng; Processing;).

مقدمة:

تعد الدوال الخاصة من أبرز الأدوات الرياضية التي أسهمت بشكل جوهري في تطور العلوم التطبيقية، إذ تُستخدم في حل العديد من المسائل الهندسية والفيزيائية المعقدة. وتأتي دالة بيتا في مقدمة هذه الدوال، نظرًا لارتباطها الوثيق بدالة غاما، ولأنها تشكل الأساس الرياضي لتوزيع بيتا الاحتمالي [11]، الذي يُستخدم على نطاق واسع في النمذجة الإحصائية، خصوصًا في مجال معالجة الإشارات والاتصالات تبرز الحاجة في هذا المجال إلى أدوات رياضية وإحصائية دقيقة لتحليل الإشارات ذات الطبيعة العشوائية والمتأثرة بالضوضاء، ووصف سلوكها بطريقة منهجية. ويُعد توزيع بيتا نموذجًا احتماليًا مرتبًا، قادرًا على تمثيل العديد من الظواهر انطلاقًا من هذه (Bit Error Rate) العشوائية، مما يمنحه أهمية خاصة في تقدير معدل الخطأ في الإرسال الأهمية، يسعى هذا البحث إلى استكشاف العلاقة الرياضية بين دالة بيتا وتوزيع بيتا، وتسليط الضوء على تطبيقاتهما العملية في معالجة الإشارات الكهربائية. كما يهدف إلى إبراز دورهما الحيوي في تحسين دقة النماذج الاحتمالية، وتطوير تقنيات الاتصالات الحديثة، بما في ذلك تصميم المرشحات وتقليل تأثير الضوضاء الإطار النظري والرياضي لدالة بيتا وتوزيع بيتا:

دالة بيتا: التعريف والخصائص الرياضية :

تُعد دالة بيتا من الدوال التكاملية الخاصة التي تحظى بأهمية كبيرة في التطبيقات الإحصائية والاحتمالية، نظرًا لقدرتها على تمثيل سلوكيات رياضية معقدة. تُعرف دالة بيتا رياضياً وفقاً للتكامل التالي

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

هما معاملات الشكل . $\alpha, \beta > 0$ حيث أن :

- الدالة معرفة فقط عندما تكون القيم موجبة.
- ترتبط دالة بيتا ارتباطاً وثيقاً بدالة جاما ويمكن التعبير عنها باستخدام العلاقة :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

وهذا الرابط يجعلها أداة فعالة في تبسيط العديد من العمليات الرياضية المعقدة خاصة في مجال توزيع الاحتمالات ، حيث تُستخدم لتطبيع دوال الكثافة الاحتمالية وضمان تكاملها الكلي.

توزيع بيتا : المفهوم والخصائص الإحصائية:

توزيع بيتا هو توزيع احتمالي مستمر يستخدم في لنمذجة المتغيرات العشوائية المجسورة بين 0 و 1. مثل نسب النجاح أو احتمالية وقوع حدث معين . يعرف توزيع بيتا بدالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{\beta(\alpha, \beta)}, 0 \leq t \leq 1$$

حيث:

هما معاملات التوزيع . $\alpha, \beta > 0$

هما دالة بيتا . $\beta(\alpha, \beta)$

$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ الخصائص الإحصائية لتوزيع بيتا : المتوسط الحسابي:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

ظهر هذه الخصائص مدى مرونة توزيع بيتا في تمثيل سلوكيات مختلفة للبيانات، حسب قيم المعاملين .

- **أهمية توزيع بيتا في النمذجة الاحتمالية:** يمتاز توزيع بيتا بقدرته على تمثيل مجموعة واسعة من الأشكال الاحتمالية، مثل : التوزيع المثلث عندما تكون $(\alpha = \beta)$ التوزيع المنحاز نحو الصفر أو الواحد (عندما تختلف القيم بشكل كبير) وهذا يجعله مثاليًا لنمذجة الظواهر التي تتطلب تمثيلاً دقيقاً للاحتمالية ووقوع قيم ضمن نطاق محدود، مثل تقدير احتمالية الخطأ (BER–Bit Error Rate) يمكن استخدام توزيع بيتا لوصف احتمال الخطأ عند الإرسال عبر قناة مشوشة .
- **فترة الضوضاء :** يتم تعديل معاملات بيتا لتقليل تأثير التشويش علي الإشارة ، خصوصاً في الاشارات الرقمية .

- نمذجة سلوك الإشارات المشوشة : يمكن تصور السلوك الاحتمالي للإشارة كنموذج بيتا مما يسهل تحليل احتمالية وقوع قيم معينة
- علاقة بين دالة بيتا وتوزيع بيتا : تُعد دالة بيتا الأساس الرياضي الذي تُبنى عليه دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بيتا. فهي تُستخدم في المقام لتطبيع التوزيع، مما يضمن أن التكامل الكلي للكثافة الاحتمالية يساوي 1. هذا التكامل بين الدالة والتوزيع يُمكن الباحثين من استخدام أدوات رياضية دقيقة لتحليل الإشارات العشوائية، وتقدير احتمالية وقوع أحداث معينة ضمن بيئة مشوشة أو غير مستقرة.
- استخدام توزيع بيتا في معالجة الإشارات الكهربائية:
- تعريف الإشارة الكهربائية :
- الإشارة الكهربائية هي موجة كهربائية تتغير مع الزمن ، ويمكن أن تكون مستمرة أو متقطعة .وتستخدم لتمثيل الصوت ، الصورة، البيانات ، أو أي نوع من المعلومات .
- أنواع الإشارات الكهربائية: تنقسم الإشارات الي نوعين رئيسين :
- إشارات تماثلية: (Analog) : تتغير بشكل مستمر مثل الصوت أو الجهد الكهربائي .
- إشارات رقمية (Digital) : تتخذ قيما محددة (0 و 1) وتستخدم في الحوسبة والاتصالات الرقمية . زتحلل الإشارات باستخدام أدوات رياضية مثل تحويل فورييه ، تحويل لابلاس والنمذجة الاحتمالية. في أنظمة الاتصالات الرقمية يعد تقدير معدل الخطأ في الإرسال من المؤشرات الأساسية لتقييم جودة القناة . يمكن استخدام توزيع بيتا لنمذجة احتمالية وقوع خطأ في الإرسال ، خاصة في القنوات التي تتأثر بالضوضاء ، أو يمكن تمثيل سلوك القناة بدقة ، وتحديد مدى احتمالية وقوع α, β التداخل ، من خلال ضبط معاملي التوزيع أخطاء في نطاق معين من الإشارة
- الضوضاء: هي إشارات غير مرغوب فيها تؤثر علي جودة الإشارة الاصلية في الانظمة الكهربائية والاتصالات تشمل أنواع الضوضاء :
- ضوضاء حرارية (Thermal Nois) ضوضاء النبضات (Impulse Nois) ضوضاء غاوسية (Gaussian) ضوضاء غير غاوسية (مثل الضوضاء المنحرفة أو المحدودة) (Nois
- تصميم المرشحات الاحتمالية:
- تستخدم المرشحات الاحتمالية في تقليل تأثير الضوضاء علي الإشارة خصوصا في البيئات ذات التشويش العالي . عند استخدام توزيع بيتا كأساس لتصميم هذه المرشحات ، يمكن تعديل شكل التوزيع ليتناسب مع خصائص الإشارة المراد تحسينها ممايسمح بفلتره أكثر دقة وفعالية .
- نمذجة سلوك الإشارات العشوائية :

الإشارات الكهربائية غالباً ما تكون ذات طبيعة عشوائية ، خاضعة في الانظمة الاسلكية أو البيئات الصناعية. يمكن استخدام توزيع بيتا كنموذج إحصائي لتمثيل هذه الإشارات ، مما يسهل تحليلها وتوقع سلوكها في ظروف مختلفة ، علي سبيل المثال ،يمكن نمذجة توزيع الطاقة أو التردد ضمن نطاق معين باستخدام بيتا مما يساعد في تحسين أداء النظام وتحديد نقاط الضعف .

- تحليل مرونة توزيع بيتا :

- يوفر توزيع بيتا مرونة كبيرة في تمثيل البيانات حيث يمكنه أن يكون متماثلاً أو منحازاً نحو أحد الاطراف حسب قيم α, β هذا يسمح بتكيف النموذج الاحتمالي وفقاً لطبيعة الإشارة او النظام سواء كانت الإشارة تميل الي القيم المنخفضة او المرتفعة .

- أمثلة : جدول قيم دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) لتوزيع بيتا:

t	PDF $PDF(\alpha = 2, \beta = 5)$	$PDF(\alpha = 5, \beta = 2)$
0.0	0.0	0.0
0.1	1.46	0.12
0.2	2.62	0.48
0.3	3.16	1.08
0.4	2.90	1.92
0.5	2.34	3.90
0.6	1.64	3.36
0.7	1.06	3.00
0.8	0.56	2.04
0.9	0.20	0.72

يوضح الجدول (1) كيف يتغير شكل التوزيع حسب معاملات

α, β $\beta_1 := 5 \quad \alpha_1 := 2$

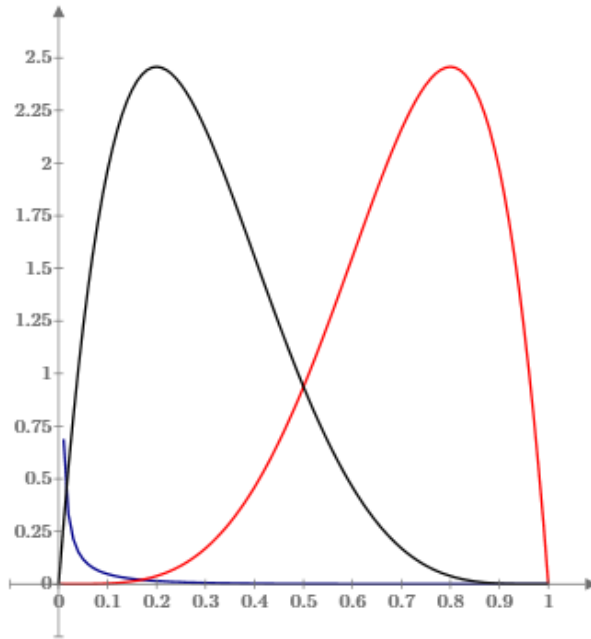
$$BetaPDF1(x, \alpha, \beta) := \frac{((x)^{\alpha_1 - 1} * (1 - x)^{\beta_1 - 1})}{\beta(\alpha_1, \beta_1)}$$

$$B(\alpha, \beta) := \Gamma(\alpha) \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

$$BetaPDF2(x, \alpha, \beta) := \frac{((x)^{\alpha_2 - 1} * (1 - x)^{\beta_2 - 1})}{\beta(\alpha_2, \beta_2)}$$

 $x := 0, 0.01 \dots 1 \quad PDF(x, \alpha_1, \beta_1)$

مقارنة بين توزيعين مختلفين لدالة بيتا :

 $PDF(x)$ $BetaPDF(x, \alpha_2, \beta_2)$ $BetaPDF(x, \alpha_1, \beta_1)$ x

الشكل البياني يبين (1) مقارنة بين توزيعين مختلفين لدالة بيتا :

علي شكل دالة الكثافة الاحتمالية α, β يوضح الرسم البياني لتوزيع بيتا كيف تؤثر مغاملات التوزيع يظهر التوزيع منحرفا نحو اليسار، مما غير المستقرة يدل علي أن القيم $\alpha = 2, \beta = 5$ عند اختيار القيم الصغيرة ل x أكثر احتمالا. هذا الشكل يعكس سلوك الاشارات التي تتعرض لتشويش كبير في بدايات الارسال

يصبح التوزيع منحرفا نحو اليمين مما $(\alpha = 5, \beta = 2)$ ويستخدم في نمذجة القنوات. في المقابل عند اختيار يعني أن القيم الكبيرة ل X هي الأكثر احتمالا هذا الشكل يستخدم في نمذجة الاشارات ذات الجودة العالية ، حيث يكون احتمال الخطأ منخفضا في معظم مراحل الارسال. تبرز هذه المقارنة مرونة توزيع بيتا مرونة توزيع بيتا في تمثيل أنواع مختلفة من البيانات والاشارات العشوائية وتؤكد اهمية اختيار معاملات التوزيع بدقة عند تصميم أنظمة الاتصالات أو المرشحات الاحصائية ، بهدف تحسين الاداء وتقليل تأثير الضوضاء .

مثال : علي توزيع بيتا في تقدير احتمالية الخطأ:

افترض ان لدينا قناة اتصال رقمية يتأثر فيها استقبال البتات بالضوضاء ، في هذه القناة احتمال ان يستقبل البت بشكل صحيح ليس ثابتا بل متغير عشوائي بين 0 و 1 .

لنفترض ان هذا المتغير العشوائي (نسبة النجاح) يتبع توزيع بيتا بالمعاملات:

$$X \sim \text{Beta} (\alpha = 3 , \beta = 7)$$

احتمالية الخطأ لبت الواحد تساوي :

$$P_e = 1 - P_{\text{success}}$$

متغير عشوائي فان : P_{success} وبما ان

، والحساب الاحصائي القيمة المتوقعة (المتوسط) لتوزيع بيتا هي: $P_e = 1 - X$

$$E[X] = \frac{3}{3+7} \quad E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ = 0.3$$

ادن متوسط احتمال النجاح = 0.3 إي 30% وبما ان :

$$E[P_e] = 1 - E[X]$$

$$E[P_e] = 1 - 0.3 = 0.7$$

ادن استخدام توزيع بيتا لوصف متغير النجاح نحصل علي ان :

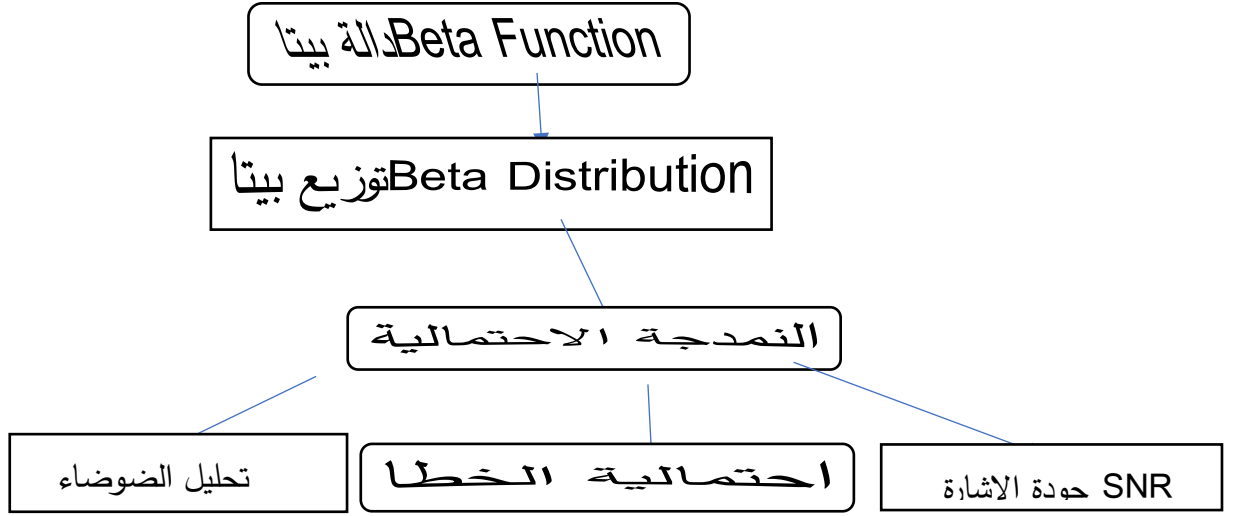
$P_e = 70\%$ احتمالية الخطأ المتوقعة في هذه القناة تساوي تقريبا :

هذا المثال يوضح كيف يمكن استخدام توزيع بيتا لنمذجة التباين في احتمالية استقبال البتات بشكل صحيح ، ومن تم تقدير متوسط احتمالية الخطأ ، هذه الطريقة مفيدة خصوصا في القنوات ذات التلاشي او القنوات الاسلكية حيث تكون نسب النجاح غير ثابتة بل عشوائية.

مخطط البياني يوضح العلاقة بين:

دالة بيتا - توزيع بيتا - التطبيقات في الهندسة الكهربائية مثل تحليل الضوضاء ، احتمالية

الخطأ وجودة الاشارة (BER (SNR



من خلال استخدام توزيع بيتا في نمذجة الإشارات الكهربائية ذات الطابع العشوائي ، تم التوصل الي فعالية هذا التوزيع في تمثيل سلوك الإشارة في بيئات مشوشة ، عند تطبيق توزيع بيتا بمعاملات مختلفة ($\alpha = 2, \beta = 5$) لوظائف التوزيع يتغير بشكل واضح ، مما يسمح بتمثيل الإشارات التي $\alpha = 5, \beta = 2$ وتمثيل الي القيم الصغيرة أو الكبيرة حسب طبيعة النظام ، كما أظهرت النتائج أنه يمكن استخدام توزيع بيتا لتقدير الخطأ في الإرسال بدقة خاصة في القنوات التي تتأثر بالضوضاء ، عند ضبط المعاملات بشكل مناسب يمكن تمثيل احتمالية الخطأ ضمن نطاق معين مما يساعد في تحسين أداء أنظمة الاتصالات ، كما أنه تم اختيار تصميم مرشحات تعتمد علي توزيع بيتا ، وتشير النتائج أن هذه المرشحات قادرة علي تقليل تأثير الضوضاء خصوصا في الإشارات الرقمية. يسمح التعديل الديناميكي لمعاملات التوزيع بتكييف المرشح مع خصائص الإشارة ، مما يعزز من جودة الإشارة المستقبلية ويقلل التشويش . وأبرزت النتائج مرونة توزيع بيتا في تمثيل أنواع متعددة من الإشارات سواء كانت متماثلة أو منحازة ، هذه المرونة تجعله أداة قوية في تحليل الإشارات العشوائية، وتفتح آفاق جديدة في مجال الاتصالات والتحكم.

التوصيات : - في ضوء ما تم استعراضه وتحليله في هذه الدراسة، يمكن تقديم التوصيات التالية لتعزيز الاستفادة من دالة بيتا وتوزيعها في مجال تحليل الإشارات الكهربائية.

- توسيع استخدام توزيع بيتا في نمذجة الإشارات العشوائية المعقدة .
- البحث في استخدام دوال بيتا مع دوال جاما في تصميم خوارزميات لتقدير الضوضاء وتوقع الإشارات المستقبلية .
- تطوير نماذج احتمالية باستخدام دالة بيتا لتقدير موثوقية مكونات الشبكة ، توقع الاعطال وتحسين ادارة الطاقة المتجددة .
- إجراء دراسات مقارنة بين توزيع بيتا وتوزيعات أخرى لتحديد الأنسب لمختلف التطبيقات.
- إدراج موضوع دالة بيتا وتوزيعها في المناهج التعليمية لطلبة الهندسة الكهربائية كأداة تحليلية مهمة .

- تشجيع التعاون البحثي بين التخصصات يُنصح بتعزيز التعاون بين الباحثين في مجالات الرياضيات التطبيقية والهندسة الكهربائية لتطوير نماذج تحليلية أكثر تكاملاً تعتمد على دالة بيتا في توصيف الأنظمة العشوائية .
- يوصى بتصميم نماذج برمجية متقدمة تتيح استخدام دالة بيتا وتوزيعها في تحليل البيانات الهندسية ، مما يسهل تطبيقها في البيئات الصناعية والبحثية .

خاتمة:

في هذا البحث تم تسليط الضوء على العلاقة الرياضية بين دالة بيتا ، واستعراض أهميتها في النمذجة الاحتمالية ومعالجة الإشارات الكهربائية ذات الطابع العشوائي .

أظهرت الدراسة أن توزيع بيتا يعد نموذجاً مرناً وفعالاً في تمثيل السلوك الاحتمالي للإشارات ، خاصة في البيئات التي تتأثر بالضوضاء والتشويش . كما أثبتت التطبيقات العملية أن استخدام هذا التوزيع يساهم في تخسين أداء أنظمة الاتصالات ، من خلال تقدير معدل الخطأ بدقة وتصميم مرشحات قادرة على تقليل تأثير الضوضاء . إن مرونة توزيع بيتا ، وقدرته على التكيف مع طبيعة الإشارة ، يجعلان منه أداة رياضية وإحصائية واعدة في تطوير تقنيات الاتصال الحديثة ، وتحسين جودة الإشارة في الأنظمة الرقمية

وتفتح هذه النتائج المجال أمام المزيد من الأبحاث المستقبلية ، التي يمكن أن تتناول دمج توزيع بيتا مع تقنيات الذكاء الاصطناعي ، أو استخدامه في تحليل الإشارات الحيوية والطبية أو في تصميم أنظمة اتصالات أكثر كفاءة واستقراراً.

المراجع: المراجع باللغة الانجليزية :

1. Haykin, S . (2001) . Communication Systems. Wiley.

2. Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (1972)

Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables Dover Publications

3. Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (2014).

Table of Integrals, Series, and Products Academic Press

Johnson, N. L., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1995)

Continuous Univariate Distributions, Volume 2

Wiley-Interscience

. Feller, W. (1968). . 5

An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1

Wiley

. Patel, J. K., & Read, C. B. (1996.)

. 6

Handbook of the Normal Distribution and Related Distributions

CRC Press

Papoulis , A ., & Pillai, S . U . (2002). . 7

Probabiliy , Random Variables and Stochastic processes. McGraw.Hill.

مراجع باللغة العربية

8- محمد زغلول، (2002). الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية. دار المريخ للنشر

9- أحمد عبدالله ، (2020) . التحليل الاحصائي للإشارات الكهربائية . دار النشر الجامعي .

10- عبد الله، محمد (2010). الأسس الرياضية في الإحصاء وتطبيقاتها. مكتبة الأنجلو المصرية

11- - محمد س . (2021) . المرشحات الاحتمالية وتطبيقاتها في الاتصالات الرقمية. المجلة العربية

للهندسة الكهربائية.

12- الشناوي ، عبد الفتاح (2008) الاحتمالات والاحصاء وتطبيقاتهما في الهندسة الكهربائية ، مكتبة الانجلو

المصرية. - الزعبي ، محمد حسن ، (2012) مدخل الي نظرية الاشارات والانظمة ، دار وائل للنشر الاردن.

13

14- محمد، خالد عبد العزيز ، (2010) ، معالجة الاشارات الرقمية ، دار الفكر العربي ، القاهرة .