Comprehensive Journal of Science
Volume (11), Issue (42), (Sapt, 2026)
ISSN: 3104-6266

مجلة العلوم الشاملة
المجلد (11) العدد 42 سبتمبر 2026
ردمد: 3104-6266

بعض خصائص دوال لجيندر الخاصة في إطار الحسبان الكسري

فادية مفتاح بنورحجاج – قسم الرياضيات – كلية التربية – جامعة ترهونة – ليبيا
عبدالسلام محمد خليفة - قسم الرياضيات – كلية التربية – جامعة ترهونة – ليبيا

Some Properties Of The Special Function Of Legendre Within Framework Of Fractional Calculus

[1] **FADIA MIFTAH BANOUR HAJAJ** - Dept. of Math., Faculty of Education, Azzaytuna University, Tarhona, Libya
https/orcid.org/0009-0008-1499-4081
[2] **D. Abdussalam Mohamed Khalifa**- bDept. of Math., Faculty of Education, Azzaytuna University, Tarhona, Libya.
1* Corresponding Author's Email: hejajfadia@gmail.com

تاريخ الاستلام: 2026/09/02 –تاريخ المراجعة:2026/09/08– تاريخ القبول: 2026/10/06– تاريخ للنشر: 07/11/ 2026

الملخص

تهدف هذه الدراسة إلى تعميم دوال لاجندر (Legendre Polynomials) الكلاسيكية إلى إطار الحسبان الكسري، من خلال تعريف عائلة جديدة من دوال لاجندر الكسرية باستخدام مشتقة ريمان–ليوفيل اليسارية ذات نقطة البداية (\1-)\، بالاعتماد على صيغة رودريغز. وتركز الدراسة على تحليل الخصائص الرياضية والتحليلية لهذه الدوال، ودراسة علاقاتها التفاضلية والتكاملية والتكرارية، والتحقق من سلوكها عند تغير رتبة الاشتقاق الكسرية، كما تبحث الدراسة العلاقة بين العائلة المقترحة ودوال لاجندر الكلاسيكية، وتوضح كيفية استعادة الحالة التقليدية عند وصول رتبة الاشتقاق إلى القيم الصحيحة. وتتناول كذلك دور دالة غاما في تعميم التعريفات الرياضية لتشمل الرتب الكسرية، مع دراسة بعض الخصائص المرتبطة بالمعادلات التفاضلية. وتوضح النتائج أن خصائص التعامد والقيم الذاتية في مسائل ستورم–ليوفيل الكسرية تتطلب شروطاً إضافية تتعلق بالمؤثر الكسري ودالة الوزن والشروط الحدية. وتبرز أهمية هذه الدوال في تطوير الحلول التحليلية والعددية للمعادلات التفاضلية الكسرية، وتطبيقاتها في نمذجة الظواهر التي تتسم بتأثير الذاكرة وعدم المحلية وتبدد الطاقة.

الكلمات المفتاحية :الحسبان الكسري، دوال لاجندر الكسرية، مشتقة ريمان–ليوفيل، صيغة رودريغز، دالة غاما، العلاقات التكرارية، مسائل ستورم–ليوفيل.

Abstract

This study aims to extend classical Legendre polynomials to the framework of fractional calculus by introducing a new family of fractional Legendre functions based on the left-sided Riemann–Liouville fractional derivative with the initial point −1, using Rodrigues' formula. The study investigates the analytical and mathematical properties of the proposed functions, including their differential, integral, and recurrence relations, as well as their behavior under varying fractional derivative orders, it also examines the relationship between the proposed family and classical Legendre polynomials, particularly the recovery of classical results when the fractional derivative order approaches integer values. Furthermore, the study highlights the role of the Gamma function in extending mathematical definitions to fractional orders and investigates related differential equations. The findings indicate that orthogonality and eigenfunction properties in fractional Sturm–Liouville problems require additional conditions involving the fractional operator, weight function, and boundary conditions. The proposed functions may provide a foundation for developing analytical and numerical solutions to fractional differential equations, particularly in modeling phenomena characterized by memory effects, nonlocality, and energy dissipation.

Keywords: Fractional Calculus, Fractional Legendre Functions, Riemann–Liouville Derivative, Rodrigues' Formula, Gamma Function, Recurrence Relations, Fractional Sturm–Liouville Problems.

المقدمة

سجلت العقود الأخيرة تطورًا وتوسعًا واضحين في النظرية الكلاسيكية للحسبان وتطبيقاته، وذلك من خلال تعميم مفهوم الحسبان من حساب التفاضل والتكامل العادي، الذي ترتبط فيه رتبة المشتقة أو التكامل بأعداد صحيحة، إلى الحسبان الكسري الذي يتيح التعامل مع رتب حقيقية وكسرية. وقد برز هذا التعميم في إطارات عديدة، أهمها صياغة وتمثيل النماذج الرياضية للظواهر الطبيعية عبر معادلات رياضية تفاضلية وتكاملية ذات مدخلات متنوعة، ونطاقات واسعة من التطبيقات في المسائل الأدق والأكثر تعقيدًا.

وقد أتاح الحسبان الكسري توسيعًا كبيرًا لقدرة النماذج الرياضية على وصف الظواهر التي لا يمكن تمثيلها بدقة كافية باستخدام المشتقات العادية من الرتب الصحيحة فقط. ففي كثير من الأنظمة الفيزيائية والهندسية والبيولوجية، لا يعتمد سلوك النظام في لحظة معينة على حالته الحالية وحدها، بل يتأثر أيضًا بتاريخه السابق وحالة الوسط المحيط به عبر فترات زمنية متباينة. ومن هنا برزت أهمية المشتقات الكسرية في تمثيل ما يُعرف بتأثير الذاكرة، حيث تحتفظ المعادلات التفاضلية الكسرية بأثر الحالات السابقة للنظام في تحديد سلوكه اللاحق.

كما ساهم هذا التوسع في تطوير نماذج أكثر مرونة لوصف ظواهر الانتشار غير الاعتيادي، وعمليات التوصيل الحراري، والتخامد، والانتشار في

وسائط معقدة، وتبدد الطاقة، والأنظمة الديناميكية غير الخطية. فبدلًا من الاعتماد على مشتقات محلية تعتمد على التغير اللحظي للدالة فقط، تتيح المشتقات الكسرية وصف سلوك تراكمي يعكس تأثير الماضي في الحاضر، مما يجعلها أدوات مناسبة لنمذجة الظواهر ذات الطابع غير المحلي.

وقد أرسى عدد من الباحثين، وأبرزهم السيد أحمد في دراساته [2–6]، إطارًا رياضيًا رصينًا لتعميم المعادلات التفاضلية والتكاملية الكلاسيكية بحيث تشمل مدخلات برتب كسرية. وقد شمل هذا الإطار دراسة الخصائص التحليلية للحلول، وطرق إثبات الوجود والتفرد، وتحليل الاستقرار، وطرق الحل التقريبي والعددي، إضافة إلى تطوير دوال خاصة وفضاءات دالية مناسبة للتعامل مع المؤثرات الكسرية. وبذلك لم يعد الحسبان الكسري مجرد تعميم شكلي للمفاهيم التقليدية، بل أصبح فرعًا رياضيًا مستقلًا ذا أدوات نظرية وتطبيقية واسعة.

وتزداد أهمية هذا الاتجاه عندما ترتبط المعادلات الكسرية بدوال خاصة معروفة، مثل دوال لاجندر، التي تمتلك خصائص تحليلية وتعامدية مهمة تجعلها مناسبة لبناء حلول متسلسلة وتمثيل الدوال في فضاءات دالية مناسبة. فتعميم هذه الدوال إلى الحالة الكسرية يفتح المجال أمام دراسة معادلات تفاضلية وتكاملية ذات رتب كسرية، ويدعم بناء حلول تحليلية ونظرية أكثر عمومية للنماذج الرياضية المعقدة.

وبذلك يشكل الحسبان الكسري جسرًا بين النظرية الكلاسيكية للتفاضل والتكامل وبين التطبيقات المعاصرة في الفيزياء والهندسة وعلوم الحاسوب والنمذجة الرياضية. وهو ما يفسر الاهتمام المتزايد به في الدراسات الحديثة، لا سيما في المسائل التي تتطلب تمثيل الذاكرة وعدم المحلية والتباعد عن السلوك الكلاسيكي للأنظمة الطبيعية، ففي الحسبان التقليدي نعلم جيدا أن رتبة المشتقة ولتكن n فإن:

$$n \in z^+ , D^n f(x) = \frac{d^n}{d^n(x)} f(x)$$

وفي حال الحسبان الكسري فنطاق الرتب يتوسع ليشمل الأعداد الكسرية وغالبا مايتم استخدام الرتبة β بحيث $(n-1 < \beta < n)$.

وهذا ما يعطي لهذا النوع من الدراسات أهمية في تطبيقاتها في الظواهر الفيزيائية وخصوصا بما يسمى (تأثير الذاكرة) ونماذج تبدد الطاقة.

وقد تطرق (ماكياس –دياز)[8] في دراساته عن تطبيقات شاملة للحسبان الكسري والتي اعتمدت في إطارها النظري على عدة تعاريف ونماذج أهمها (ريمان_ ليوفيل) وصيغتها الرياضية:

$$D_a^{*\beta} f(x) = \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(s)\, ds, \ \beta \in (n-1, n)$$

ونلاحظ استخدام دالة جاما Γ في صيغ الحسبان الكسري بدلا من استخدام المضروب العادي $n!$ المتعارف عليه في حدودية لاجندر بحيث،

$$\Gamma(\beta + 1) = \beta!$$

مما يتيح لنا فرص استخدام المدخلات الكسرية كرتب وتخطي شرط الاعداد الصحيحة في المضروب, وتظهر أهمية هذه الدالة(دالة جاما) في صيغ رودريغيز ففي الصيغة العادية المولدة لحدودية لاجندر:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} D^n \ (x^2 - 1)^n$$

والصيغة الكسرية المدعومة بجاما:

$$P_{n,\beta}(x) = \frac{1}{2^n \Gamma(\beta + 1)} \ {}_{-1}D^{\beta} \ (x^2 - 1)^{\beta}$$

وأدى هذا الإنجاز العلمي إلى قفزة جوهرية ومغيّرة للقواعد في هذا الإطار القابل للتطبيق المباشر، الذي شكّل مع نماذج كابوتو القاعدة النظرية المتينة التي تستند إليها الدراسات الحديثة في الحسبان الكسري. وفي السياق نفسه من هذه التطورات، تميّز نموذج كابوتو عن نموذج ريمان–ليوفيل بأنه يتشابه إلى حد كبير مع التفاضل العادي؛ إذ إن مشتقة الدالة الثابتة في معنى كابوتو تساوي صفرًا، كما يتيح نموذج كابوتو استخدام الشروط الابتدائية الصحيحة المعتادة في صياغة المسائل الرياضية، وهذه الخاصية تجعله أكثر ملاءمة لتمثيل الظواهر الفيزيائية التي تبدأ بشروط مألوفة، مثل تحديد السرعة الابتدائية أو التسارع الابتدائي أو وصف تبدد الطاقة في الأنظمة الديناميكية، وبذلك يقدم نموذج كابوتو إطارًا عمليًا وفعالًا لنمذجة الظواهر التي تتطلب شروطًا ابتدائية واضحة، مع الحفاظ على التأثير التراكمي للذاكرة الذي يميز الحسبان الكسري [9][14]

واستعانت هذه الدراسة بدالة خاصة مهمة وهي **دوال لاجندر** $P_n(x)$ كأداة تحليلية أساسية. ففي الحسبان العادي، تمثل هذه الحدوديات حلولًا لمعادلة تفاضلية ذات مكانة وأهمية واسعة في التطبيقات العملية، وتُعد دوال لاجندر $P_n(x)$ من الدوال الخاصة الأساسية في التحليل الرياضي، إذ تظهر في حل مسائل القيم الحدية، ونماذج الجذب الكهرومغناطيسي، ونظرية الجهد، وتمثيل الدوال في متسلسلات، وحل المعادلات التفاضلية في الفضاءات ذات التناظر الكروي. [1].

ونظرًا لتركيز هذه الدراسة على المعادلات ذات الرتب الكسرية، ودورها الفعّال في نمذجة الأمثلة الأكثر تعقيدًا المعتمدة على «ذاكرة» المكان والزمان، أصبح تعميم دوال لاجندر لتشمل مدخلات برتب كسرية أمرًا واقعيًا وبالغ الأهمية. فالدوال الكسرية المرتبطة بحدود لاجندر تُستخدم

كأساس لبناء منظومات المؤثر الكسري الخاص بالحسبان، وتوفر أداة تحليلية مناسبة لتمثيل الحلول في المسائل ذات الرتب الكسرية، كما تتيح هذه الدوال إمكانية دراسة الخصائص الأساسية والحفاظ عليها في الإطار الكسري، ومنها علاقات التعامد بالنسبة إلى دالة وزن مناسبة، إضافة إلى خاصية التكرار المعممة، وتُعد دوال لاجندر الكسرية دوال ذاتية في تحليل نماذج ستورم–ليوفيل الكسرية، وخاصة المعادلات المولّدة ذات الرتبة الكسرية المقترنة بشروط حدية مناسبة.

أهمية الدراسة

تكمن أهمية هذه الدراسة في أنها تسهم في تطوير النظرية الرياضية للدوال الخاصة ضمن إطار الحسبان الكسري، من خلال تعريف ودراسة عائلة من دوال لاجندر الكسرية المبنية على مشتقة ريمان–ليوفيل اليسارية ذات نقطة البداية $-1-1$ وتطبيقها على صيغة رودريغز. فبدلًا من الاكتفاء بالتعريفات الكلاسيكية التي تقتصر على رتب الاشتقاق الصحيحة، تقدم الدراسة إطارًا يتيح التعامل مع رتب كسرية، مما يوسع نطاق استخدام دوال لاجندر في المعادلات التفاضلية والتكاملية ذات الرتب الكسرية.

وتزداد أهمية الدراسة من كونها تسعى إلى دراسة الخصائص الأساسية للعائلة المقترحة، مثل العلاقات التفاضلية والتكاملية، والعلاقات التكرارية، وسلوك الدوال عند تغير رتبة الاشتقاق الكسرية. كما تركز على التحقق من العلاقة بين دوال لاجندر الكسرية ودوال لاجندر الكلاسيكية، بحيث تؤول العائلة الكسرية إلى العائلة التقليدية عندما تكون رتبة الاشتقاق عددًا صحيحًا. وهذا يضمن الاتساق بين النتائج الجديدة والأسس الكلاسيكية المعروفة في نظرية الدوال الخاصة، كما تسهم الدراسة في إبراز الفرق بين نموذجي ريمان–ليوفيل وكابوتو في الحسبان الكسري، وتوضيح ملاءمة كل منهما لنوع المسألة المراد حلها. فنموذج كابوتو يتناسب مع المسائل ذات الشروط الابتدائية المألوفة، بينما يوفر نموذج ريمان–ليوفيل إطارًا مناسبًا لبناء التعريفات التي تعتمد على التكامل الكسري وصيغ رودريغز، وهو ما يعتمد عليه تعريف دوال لاجندر الكسرية في هذه الدراسة.

وتعطي الدراسة أهمية إضافية من كونها تضع العائلة المقترحة في سياقها العلمي الصحيح، من خلال مقارنتها بالدراسات السابقة التي تناولت دوال لاجندر الكسرية ودوال جاكوبي الكسرية ومسائل ستورم–ليوفيل الكسرية. فبدلًا من افتراض تطابق العائلة المقترحة مع التعريفات الأخرى، تسعى الدراسة إلى تحديد أوجه التشابه والاختلاف بينها، وتوضيح الإضافة العلمية التي تقدمها في تحليل خصائص العائلة المحددة، وبذلك تشكل هذه الدراسة مساهمة في تعميق الفهم النظري للحسبان الكسري ودواله الخاصة، وتفتح آفاقًا لاستخدام دوال لاجندر الكسرية في البناء الطيفي للحلول، وطرق غاليركن، والتربيع الطيفي، وحل المعادلات التفاضلية الكسرية في الفيزياء والهندسة والنمذجة الرياضية.

أهداف الدراسة

1. تهدف هذه الدراسة إلى تعميم دوال لاجندر الكلاسيكية إلى إطار الحسبان الكسري، وذلك من خلال تعريف عائلة جديدة من الدوال الكسرية المرتبطة بصيغة رودريغز، ودراسة خصائصها التحليلية والتفاضلية والتكرارية. كما تسعى الدراسة إلى فحص مدى إمكانية الحفاظ على الخصائص الأساسية لدوال لاجندر التقليدية عند الانتقال من الرتب الصحيحة إلى الرتب الكسرية.
2. ويمكن تفصيل أهداف الدراسة على النحو الآتي:

- تعريف دوال لاجندر الكسرية باستخدام مشتقة ريمان–ليوفيل اليسارية ذات نقطة البداية $1-1-1-$، وتطبيقها على صيغة رودريغز الكلاسيكية.
- دراسة العلاقة بين دوال لاجندر الكسرية المقترحة ودوال لاجندر الكلاسيكية، والتحقق من أن العائلة الكسرية تؤول إلى العائلة التقليدية عندما تكون رتبة الاشتقاق عددًا صحيحًا.
- اشتقاق صيغ تفاضلية وتكاملية للدوال الكسرية المقترحة، ودراسة سلوكها عند تغير رتبة الاشتقاق الكسرية.
- إثبات العلاقات التكرارية التي تربط بين دوال لاجندر الكسرية ذات الرتب المتتالية، وبيان مدى قابلية هذه العلاقات للتعميم من الحالة الكلاسيكية إلى الحالة الكسرية.
- دراسة خصائص التعامد للدوال الكسرية المقترحة بالنسبة إلى دالة وزن مناسبة، وتحديد الشروط التي تتحقق فيها هذه الخاصية.
- تحليل إمكانية اعتبار دوال لاجندر الكسرية دوال ذاتية لمسائل ستورم–ليوفيل الكسرية، وذلك بتحديد المؤثر الكسري المناسب، ودالة الوزن، والشروط الحدية المرافقة.
- مقارنة العائلة المقترحة بالتعريفات الأخرى لدوال لاجندر الكسرية، وخاصة التعريفات المبنية على مشتقة كابوتو، وبيان أوجه التشابه والاختلاف بينها.
- توظيف الدوال الكسرية المقترحة في بناء حلول تحليلية أو تقريبية للمعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية.
- إبراز أهمية الحسبان الكسري في نمذجة الظواهر التي تتسم بتأثير الذاكرة وعدم المحلية، وربط ذلك بالدور التحليلي لدوال لاجندر الكسرية.

أساسيات التفاضل والتكامل الكسري

لنفرض أن $a, \beta \in R^+$ عددان حقيقيان موجبان، فإن لدينا بعض المفاهيم والتعريفات المهمة التالية للتكامل والتفاضل من الرتب الكسرية:

التعريف1 ([4], [5])

إذاكان $f(t) \in L_1 , \beta \in R$، فإن تكامل $f(t)$ الكسري من الرتبة β يعرف كالتالي:

$I_a^\beta f(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s)\, ds$, بحيث Γ دالةجاما

وتكتب أيضا بالشكل:

$I_a^\beta\, f(t) = \int_0^{t-a} \frac{u^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(t-u)\, du$. بوضع $u = t - s$

وبوضع $a = 0$ فإنه بالإمكان كتابة:

$$I^\beta\, f(t) = I_0^\beta\, f(t) = f(t) * \eta_\beta(t)$$

عندما:

$$\eta_\beta(t) = \begin{cases} \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & for\ \ t > 0 \\ 0 & for\ \ t \le 0 \end{cases}$$

بحيث η تحقق:

$$\eta_\beta(t) * \eta_\gamma(t) = \eta_\beta + \gamma^{(t)}$$

وللمُشْتَقَة من الرتبة الكسرية لدينا التعاريف التالية:

التعريف 2: (ريمان – ليوفيل)[7].

مشتقة (ريمان – ليوفيل) للدالة $f(t)$ من الرتبة $\beta \in (0\ ,1)$ تعرف كالتالي:

$$D_a^{*\beta}\, f(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\, f(s)\, ds$$

أو

$$D_a^{*\beta}\, f(t) = \frac{d}{dt}\ I_a^{1-\beta} f(t)$$

والمُشْتقَة ذات الرُتب الكسرية $\beta \in (n-1\ , n)$ تعرف بأنها

$$D_a^{*\beta}\, f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\ I_a^{n-\beta}\, f(t) \quad , n = 1\ , 2\ , \ldots$$

والوصول لتعريف واضح وممكن التطبيق للإشتقاق الكسري (لريمان – ليوفيل) أدى دور هام في إثراء وتوسيع نطاق تطبيقات الاشتقاق والتكامل الكسري ليس فقط كمفاهيم في الرياضة البحت, بل بما تقتضيه متطلبات العلوم والتقنية الحديثة.

تعريف 3:(كابوتو) [1]

المشتقة الكسرية D_a^β من الرتبة $\beta \in (0, 1]$ للدالة المتصلة اتصالا مطلقا $f(t)$ بأنها تُعرَّف

$$D_a^\beta f(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\ \frac{d}{ds} f(s)\, ds$$

أو

$$D_a^\beta f(t) = I_a^{1-\beta}\ \frac{d}{dt} f(t)\, .$$

والمشتقة ذات الرتبة الكسرية $\beta \in (n-1\,,n]$ تُعرّف بواسطة

$$n = 1\,,2\,,\ldots \text{ و } \frac{d^n}{dt^n}\, f(t) \in L_1[a\,,b] \;:\; D_a^{\beta} f(t) = I_a^{n-\beta}\, \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

وتتمثل المميزات الأساسية لطريقة كابوتو في كون الشروط الابتدائية للمعادلات التفاضلية الكسرية المرفقة بمشتقات كابوتو تتخذ نفس الشكل المألوف لمعادلات الرتب الصحيحة.

تعريف [1]4

تعرف صيغة رودريغز بأنها أهم الصيغ ا لتوليد دوال لجيندر وصيغتها العامة:

$$P_{n,\beta}(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\; {}_{-1}D^{\beta}\, (x^2-1)^n\,, \;\; n = 1\,,2\,,\ldots \qquad (1)$$

$$\beta \in (n-1\,,n] \;\;,x \in (-1\,,1) \qquad \text{بجيث}$$

المادة العلمية والإطار النظري:

نظرية1:

$$\lim_{\beta \to n-1} P_{n,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2\,n-k)!}{2^{n-k}\; k!\,(n-k)!\;\Gamma(n-k+2)}\; (x+1)^{n-k+1}$$

$$\beta \in (n-1\,,n] \;\;,x \in (-1\,,1) \qquad \text{بجيث}.$$

البرهان:

$$P_{n,\beta}(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\; {}_{-1}D^{\beta}(x^2-1)^n$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\,(-2)^n\, n!}{2^{n-k}\; k!\,(n-k)!}\; {}_{-1}I^{n-\beta}\; D^n\, (x+1)^{2n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,(2n-k)!}{2^{n-k}\; k!\;[(n-k)!]^2}\; {}_{-1}I^{n-\beta}\; (x+1)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,(2n-k)!}{2^{n-k} k!\,(n-k)!\;\Gamma(2n-k-\alpha+1)}\; (x+1)^{2n-\beta-k}$$

$$\lim_{\beta \to n-1} P_{n,\beta}(x) = \lim_{\alpha \to n-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,(2n-k)!}{2^{n-k}\; k!\,(n-k)!\;\Gamma(2n-k-\beta+1)}\; (x\;+1)^{2n-\beta-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,(2n-k)!}{2^{n-k}\; k!\,(n-k)!\;\Gamma(2n-k-n+1+1)}\; (x+1)^{2n-n+1-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,(2n-k)!}{2^{n-k}\; k!\,(n-k)!\;\Gamma(n-k+2)}\; (x+1)^{n-k+1}$$

نظرية2

لنفرض أن لدينا:

$\beta \in (n-1\,,n]\,, \quad n = 1\,,2\,,\ldots$ فإن:

$$\lim_{\beta \to (n)^-} P_{n,\beta}(x) = P_{n,n-1}(x) \qquad \text{(i)}$$

$$= \tfrac{1}{2^n\, n!}\; D^n (x^2-1)^n$$

$$\lim_{\beta \to (n-1)^+} P_{n,\beta}(x) = P_{n,n-1}(x) \qquad \text{(ii)}$$

$$= \tfrac{1}{2^n\, n!} D^{n-1} (x^2-1)^n$$

$$P_{n,n-1}(x) = \int_{-1}^{x} P_n(s)\, ds \qquad \text{(iii)}$$

البرهان

(i) دالة لجيندر معرفة بـ

$$\begin{aligned}
P_{n,\beta}(x) &= \frac{1}{2^n\, n!}\ {}_{-1}D^{\beta}\ (x^2-1)^n \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\ {}_{-1}I^{n-\beta}\ D^n\ (x^2-1)^n \\
\lim_{\beta\to(n)^-} P_{n,\beta}(x) &= \frac{1}{2^n\, n!}\ \lim_{\beta\to(n)^-} {}_{-1}I^{n-\beta}\ D^n(x^2-1)^n \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\ \lim_{n-\beta\to 0} {}_{-1}I^{n-\beta}\ D^n\ (x^2-1)^n \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\ D^n\ (x^2-1)^n \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\ D^n\ (x^2-1)^n \\
&= P_n(x)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
P_{n,\beta}\ \ (x) &= \frac{1}{2^n\, n!}\ {}_{-1}D^{\beta}\ (x^2-1)^n\,, \quad n = 1\,,2\,,\ldots \\
&= \tfrac{1}{2^n\, n!}\ {}_{-1}I^{n-\beta}\ D^n\ (x^2-1)^n \\
\lim_{\beta\to(n-1)^+} P_{n,\beta}(x) &= \frac{1}{2^n\, n!}\ \lim_{\beta\to(n-1)^+} {}_{-1}I^{n-\beta}\ \ D^n\ (x^2-1)^n \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\ \lim_{n-\beta\to 1^+} I^{n-\beta}\ \ D^n\ (x^2-1)^n \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\ {}_{-1}I\ D^n\ (x^2-1)^n \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\ \{D^{n-1}\ (x^2-1)^n - D^{n-1}\ (x^2-1)^n|_{\chi=-1}\}
\end{aligned}$$

بما أن:

$$\begin{aligned}
D^{n-1}\ (x^2-1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n\, n!}{2^{k-n}\, k!\, (n-k)!}\ D^{n-1}\ (x+1)^{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n\ (n)!\ (n+k)!}{2^{k-n}\, k!\ (n-k)!\, (k+1)!}\ (x+1)^{k+1}
\end{aligned}$$

مما يعني أن:

$$\begin{aligned}
D^{n-1}\ (x^2-1)^n|_{\ x=-1} &= 0 \\
\lim_{\beta\to(n-1)^+}\ P_{n,\beta}(x) &= \tfrac{1}{2^n\, n!}\ D^{n-1}\ (x^2-1)^n \\
&= P_{n,n-1}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{n,n-1}(x) &= \tfrac{1}{2^n\, n!}\ {}_{-1}I\ D^n\ (x^2-1)^n \qquad \text{(iii)} \\
&= {}_{-1}I\ P_n(x)
\end{aligned}$$

$$P_{n,n-1}(x) = \int_{-1}^{x} P_n(s)\, ds \qquad (2)$$

فثلا

لتوضيح أن

$$P_{1,0}(x) = \frac{1}{2}\,(x^2-1) \quad \text{و} \quad P_{2,1}(x) = \frac{1}{2}\,x(x^2-1)$$

من المعادلة (2) فإنه لدينا:

$$\begin{aligned} P_{1,0}(x) &= \int_{-1}^{x} P_1(s)\, ds \\ &= \int_{-1}^{x} s\ ds \\ &= \frac{1}{2}\,(x^2-1) \end{aligned}$$

وأيضا:

$$\begin{aligned} P_{2,1}(x) &= \int_{-1}^{x} P_2(s)\, ds \\ P_{2,1}(x) &= \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}\,(3s^2-1)\, ds \\ P_{2,1}(x) &= \frac{1}{2}\,(s^3-s)\,|_{-1}^{x} \\ &= \frac{1}{2}\,x(x^2-1) \end{aligned}$$

نتيجة:

$P_{n,n-1}(-x) = (-1)^{n-1}\,P_{n,n-1}(x)$ عندما $\mathrm{n} = 1,2,\ldots$

البرهان:

من تعريف دالة لجيندر $P_{n,n-1}(x)$

فإن

$$\begin{aligned} P_{n,n-1}(-x) &= \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^{n-1}}{d(-x)^{n-1}}\,((-x)^2-1)^n \\ &= \frac{(-1)^{1-n}}{2^n\,n!}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(x^2-1)^n \end{aligned}$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} P_{n,n-1}(-x) &= (-1)^{n-1}\,\frac{1}{2^n\,n!}\,D^{n-1}\,(x^2-1)^n \\ &= (-1)^{n-1}\,P_{n,n-1}(x) \end{aligned}$$

وإذا كان $n = 1$ نحصل على:

$$\begin{aligned} P_{1,0}(-x) &= \frac{1}{2}\,((-x)^2-1) \\ &= \frac{1}{2}\,(x^2-1) \\ &= P_{1,0}(x) \end{aligned}$$

نظرية 3

إذا كان $\beta \in (0,1]$ و $n = 1, 2, \dots$ فإن

$$ {}_{-1}D^{\beta}\, P_{n,n-1}(x) = P_{n,n+\beta-1}(x) $$

و

$$ \lim_{\beta \to 1} {}_{-1}D^{\beta}\, P_{n,n-1}(x) = P_n(x) $$

البرهان :

من تعريف $P_{n,n-1}(x)$:

فإن:

$$ \begin{aligned} {}_{-1}D^{\beta}\, P_{n,n-1}(x) &= {}_{-1}D^{\beta}\, \frac{1}{2^n\, n!}\, D^{n-1}\,(x^2-1)^n \\ &= {}_{-1}I^{\beta-1}\, D\, \frac{1}{2^n\, n!}\, D^{n-1}\,(x^2-1)^n \\ &= \frac{1}{2^n\, n!}\, {}_{-1}I^{1-\beta}\, D^n\,(x^2-1)^n \\ &= \frac{1}{2^n\, n!}\, {}_{-1}I^{n-(\beta+n-1)}\, D^n\,(x^2-1)^n \\ {}_{-1}D^{\beta}\, P_{n,n-1}(x) &= \frac{1}{2^n\, n!}\, {}_{-1}D^{\beta+n-1}\,(x^2-1)^n \\ {}_{-1}D^{\beta}\, P_{n,n-1}(x) &= P_{n,\beta+n-1}(x) \end{aligned} $$

و

$$ \begin{aligned} \lim_{\beta \to 1} {}_{-1}D^{\beta}\, P_{n\,n-1}(x) &= \lim_{\beta \to 1} P_{n,\beta+n-1}(x) \\ &= \lim_{\beta+n-1 \to n} P_{n,\beta+n-1}(x) \\ &= P_n(x) \end{aligned} $$

النظرية4 (العلاقة التكرارية)

إذا كانت $n = 1, 2, \dots$ فإن:

$$ \frac{d}{dx}\Big(P_{n+1,n}(x) - P_{n-1,n-2}(x)\Big) = (2n+1)P_{n,n-1}(x) $$

البرهان :

من تعريف $P_{n+1,n}(x)$ يمكن القول أن:

$$ \begin{aligned} P_{n+1,n}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\, D^n\,(x^2-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\, D^{n-2}\, D^2 (x^2-1)^{n+1} \\ &= \frac{2(n+1)}{2^{n+1}\,(n+1)!}\, D^{n-2}\,\Big((2n+1)\,(x^2-1)^n \\ &\quad +2n\,(x^2-1)^{n-1}\Big) \\ &= \frac{2n+1}{2^n\,(n)!}\, D^{n-2}\,(x^2-1)^n + \frac{2n}{2^n\, n!}\, D^{n-2}\,(x^2-1)^{n-1} \\ &= (2n+1)\, P_{n,n-2}(x) + \frac{1}{2^{n-1}\,(n-1)!}\, D^{n-2}\,(x^2-2)^{n-1} \\ &= (2n+1)\, P_{n,n-2}(x) + P_{n-1,n-2}(x) \end{aligned} $$

وهذا يقتضي :

$$P_{n+1,n}(x) - P_{n-1,n-2}(x) = (2n+1)\, P_{n,n-2}$$

بتفاضل طرفي المعادلة بالنسبة لـ x :

$$\frac{d}{dx}\Big(P_{n+1,n}(x) - P_{n-1,n-2}(x)\Big) = (2n+1)\, P_{n,n-1}(x)$$

النظرية 5 :

إذا كان لدينا $\beta \in (0,1]$ و $n = 1, 2, \dots,$ فإن:

$${}_{-1}D^{\beta+1}\, P_{n+1,n}(x) = (2n+1)\, {}_{-1}D^{\beta}\, P_{n,n-1}(x) + {}_{-1}D^{\beta}\, P_{n-1,n-1}(x)$$

البرهان

من تعريف $P_{n+1,n}(x)$:

$$\begin{aligned}
&{}_{-1}D^{\beta+1}\, P_{n+1,n}(x) \\
&= D^{\beta+1}\left[\frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\, D^n\,(x^2-1)^{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\, {}_{-1}I^{1-(\beta+1)}\, D^{n+1}\,[(x^2-1)^{n+1}] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\, {}_{-1}I^{1-(\beta+1)}\, D^{n-1}\,[D^2\,(x^2-1)^{n+1}] \\
&= \frac{2(n+1)}{2^{n+1}\,(n+1)!}\, {}_{-1}I^{1-(\beta+1)}\, D^{n-1}\,[(2n+1)(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^{n-1}] \\
&= \frac{1}{2^{n}\,(n)!}\, {}_{-1}I^{1-(\beta+1)}\,[(2n+1)\, D^{n-1}\,(x^2-1)^n \\
&\qquad + 2n\, D^{n-1}\,(x^2-1)^{n-1}]
\end{aligned}$$

مما يعني أن

$$\begin{aligned}
{}_{-1}D^{\beta+1}\, P_{n+1,n}(x) &= {}_{-1}I^{(1-\beta)}\, D\,\big[(2n+1)P_{n,n-1}(x) + P_{n-1,n-1}(x)\big] \\
&= (2n+1)\, {}_{-1}D^{\beta}\, P_{n,n-1}(x) + {}_{-1}D^{\beta}\, P_{n-1,n-1}(x)
\end{aligned}$$

النظرية 6 :

الدالة : $P_{n,n-1}(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\, D^{n-1}\,(x^2-1)^n$ تحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\, \frac{d}{dx}\, y(x)\right\} + 2x\, \frac{d}{dx}\, y(x) + n(n+1)\, y(x) = 0$$

البرهان :

لنفرض أن $F(x) = (x^2-1)^n$, ثم نتحصل على

$$F'(x) = 2n\, x\, (x^2-1)^{n-1}$$

يستلزم أن

$$2nx\, F(x) = (x^2-1)\, F'(x)$$

الاشتقاق n في كلا الطرفين:

$$D^n\,\{2nx\, F(x)\} = D^n\,\{(x^2-1)\, F'(x)\}$$

$$2n\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,[D^k x]\,[D^{n-k}\, F(x)] \qquad = 2n\, x\, F^n(x) + 2n^2\, F^{(n-1)}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,[D^k(x^2-1)]\,\big[D^{n-k}\; F'(x)\big]$$

$$= (x^2-1)\, F^{(n+1)}(x) \; + 2n\, x\, F^{(n)}(x) \; + \; n(n-1)\, F^{(n-1)}(x\,)$$

ومن هذا نحصل على

$$2n\,x\,F^{n}(x) + 2n^2\,F^{(n-1)}(x) = (x^2-1)\,F^{(n+1)}(x) + 2n\,x\,F^{(n)}(x) + n(n-1)\,F^{(n-1)}(x)$$

مما يقتضي أن

$$(1-x^2)\,F^{(n+1)}(x) - 2nx\,F^{n}(x) + 2nx\,F^{(n)}(x) + n(n+1)\,F^{(n-1)}(x) = 0$$

بالقسمة على $2^n\,(n)!$ وبتطبيق صيغة رودريغز، لدينا

$$(1-x^2)\,\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{1}{2^n\,n!}\,D^{n-1}\,(x^2-1)^n\right] - 2x\,\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2^n\,n!}\,D^{n-1}\,(x^2-1)^n\right]$$
$$+2x\,\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2^n\,n!}\,D^{n-1}\,(x^2-1)^n\right] + n(n+1)\left[\frac{1}{2^n\,(n)!}\,D^{n-1}\,(x^2-1)^n\right] = 0$$

يقتضي أن

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{d}{dx}\,P_{n,n-1}(x)\right] + 2x\,\frac{d}{dx}\,P_{n,n-1}(x) + n(n+1)\,P_{n,n-1}(x) = 0$$

الدراسات السابقة:

شهدت دراسة الدوال الخاصة في إطار الحسبان الكسري تطوراً ملحوظاً، ولا سيما في تعميم الأسس الكلاسيكية لكثيرات الحدود المتعامدة وبناء طرائق تحليلية وعددية لحل المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية. وفيما يأتي عرض موجز لأعمال ترتبط مباشرة بموضوع هذه الدراسة، مع بيان وجه الصلة والاختلاف بينها وبين العائلة المعرفة في هذا البحث.

قدّم كاظم وعباسبندي وكومار (Kazem, Abbasbandy, & Kumar, 2013) صياغة عامة لما أطلقوا عليه دوال ليجاندر ذات الرتب الكسرية، بهدف استخدامها في حل المعادلات التفاضلية الكسرية. واعتمدوا في تعريف المشتقة الكسرية على صيغة كابوتو باستخدام تكامل ريمان–ليوفيل، واشتقوا صيغاً للمشتقات ومصفوفات تشغيلية للضرب، ثم وظفوا هذه الأدوات مع طريقة تاو لتحويل مسائل تفاضلية خطية وغير خطية إلى أنظمة جبرية. وتتمثل صلة هذا العمل ببحثنا في تعميم البنية المرتبطة بكثيرات حدود ليجاندر إلى سياق الرتب الكسرية؛ أما الاختلاف الرئيس فينبغي التنبه إليه، إذ إن تعريف العائلة في مخطوطتنا ينطلق من تطبيق مشتقة ريمان–ليوفيل اليسارية ذات نقطة البداية −1 على n^(x²−1)^ وفق صيغة رودريغز، وهو تعريف لا يجوز افتراض مطابقته لتعريف الدوال الوارد عند كاظم وزميليه دون برهان صريح. [16]

درس زايرنوري وكارنياداكيس (Zayernouri & Karniadakis, 2013) مسائل القيم الذاتية من نوع ستورم–ليوفيل الكسري، بنوعيها المنتظم والمفرد، وباستخدام مؤثرات كسرية من نوعي ريمان–ليوفيل وكابوتو. واشتق الباحثان حلولاً ذاتية تحليلية غير كثيرة حدود أطلقا عليها اسم «متعددات حدود جاكوبي الكسرية» (Jacobi poly-fractonomials)، وأثبتا خواص تتعلق بواقعية القيم الذاتية والتعامد بالنسبة إلى دوال الوزن الملائمة، كما بحثا خصائص التقريب العددي لهذه الدوال. وتفيد هذه الدراسة في وضع موضوع المؤثرات الكسرية والتعامد ضمن سياقه الطيفي الصحيح؛ لكنها لا تثبت تلقائياً أن العائلة المعرفة في بحثنا دوال ذاتية لمؤثر ستورم–ليوفيل كسري، إذ يتطلب ذلك تحديد المؤثر ومجاله وشروطه الحدية وإثبات خاصية القيمة الذاتية والتعامد للعائلة المقترحة نفسها. [17]

وفي امتداد لهذا الاتجاه، قدّم زايرنوري وأينسورث وكارنياداكيس (Zayernouri, Ainsworth, & Karniadakis, 2015) دراسة لمسائل ستورم–ليوفيل الكسرية المخمدة (Tempered Fractional Sturm–Liouville Problems)، وناقشوا عائلات من الدوال الذاتية المتعامدة واستخدامها في طرائق طيفية من نوع بتروف–غاليركن لحل معادلات تفاضلية كسرية. وتبرز أهمية هذا العمل في توضيح أن بناء أساس طيفي كسري متعامد يرتبط باختيار مؤثر كسري محدد وشروط حدية ووزن مناسب، وليس بمجرد وجود مشتقة كسرية في تعريف الدالة. [18]

كما عرض ماشادو وكيريوفا (Machado & Kiryakova, 2021) دليلاً تمهيدياً للدوال الخاصة في الحسبان الكسري، تناول الأطر العامة للتكاملات والمشتقات الكسرية وبعض الدوال الخاصة المستخدمة بوصفها نوى في المؤثرات الكسرية المعممة. وتوفر هذه الدراسة خلفية مرجعية لفهم الصلة بين نظرية المؤثرات الكسرية ونظرية الدوال الخاصة، وتؤكد أهمية التصريح بنوع المؤثر وتعريفه ونقطة بدايته عند بناء تعميمات جديدة. [19]

أما كثيرات حدود ليجاندر الكلاسيكية، فتُعد صيغة رودريغز وعلاقات التعامد والمعادلة التفاضلية من خصائصها الأساسية الموثقة في المرجع الرقمي للمعهد الوطني الأمريكي للمعايير والتقنية (NIST Digital Library of Mathematical Functions)، ولا سيما الفصل الرابع عشر الخاص بدوال ليجاندر والفصل الثامن عشر الخاص بكثيرات الحدود المتعامدة. ويُستفاد من هذا المرجع في تثبيت الحالة الكلاسيكية التي ينبغي أن تتوافق معها الصيغ الحدية للعائلة المقترحة عند رجوع رتبة الاشتقاق إلى رتبة صحيحة. [20]

تعقيب على الدراسات السابقة:

توضح الأعمال السابقة وجود مسارين متكاملين: أولهما بناء دوال ليجاندر أو دوال متعامدة ذات رتب كسرية لاستخدامها في الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الكسرية، وثانيهما تطوير نظرية طيفية لمسائل ستورم–ليوفيل الكسرية وإثبات التعامد والخصائص الذاتية لعائلات مرتبطة بمؤثرات محددة. وتتمثل نقطة

الانطلاق في المخطوطة الحالية في تعريف عائلة بواسطة مشتقة ريمان–ليوفيل اليسارية المطبقة على صيغة رودريغز مع نقطة بداية -1. ومن ثم فإن الإضافة التي تسعى الدراسة إلى بحثها هي تحليل خصائص هذه العائلة المحددة، والتحقق من حدودها وعلاقاتها التفاضلية والتكرارية. ولا يُعد ذلك وحده دليلاً على الجدة المطلقة أو على خاصية التعامد أو كون الدوال ذاتية لمؤثر ستورم–ليوفيل؛ فهذه ادعاءات مستقلة ينبغي إثباتها ومقارنتها بالتعريفات والنتائج المنشورة في الدراسات المشار إليها.

وبناءً على ذلك، ستُستخدم الدراسات السابقة هنا إطاراً للمقارنة لا بديلاً عن البرهان: تُقارن الحالة الكلاسيكية بصيغ ليجاندر المعروفة، وتُقارن البنية الكسرية بدوال ليجاندر الكسرية المبنية على تعريف كابوتو، كما تُفصل نتائج العائلة المقترحة عن نتائج مسائل ستورم–ليوفيل الكسرية التي تعتمد على مؤثرات وأوزان وشروط حدية أخرى.

الاستنتاجات

استنتج الباحثان من هذه الدراسة أن تعميم دوال لاجندر إلى إطار الحسبان الكسري يمثل امتدادًا طبيعيًا للنظرية الكلاسيكية للدوال الخاصة، غير أن هذا التعميم لا يقتصر على استبدال رتبة الاشتقاق الصحيحة برتبة كسرية، بل يتطلب اختيارًا دقيقًا لنوع المشتقة الكسرية، ونقطة البداية ودالة الوزن والشروط الحدية المرافقة، وتتمثل النتائج في النقاط التالية:-

- تم تعريف دوال لاجندر الكسرية اعتمادًا على مشتقة ريمان–ليوفيل اليسارية ذات نقطة البداية -1–1–1–، وتطبيقها على صيغة رودريغز الكلاسيكية، بحيث تشكل هذه العائلة امتدادًا طبيعيًا لدوال لاجندر التقليدية.
- تبين أن دوال لاجندر الكسرية تؤول إلى دوال لاجندر الكلاسيكية عندما تكون رتبة الاشتقاق عددًا صحيحًا غير سالب، مما يضمن الاتساق بين التعريف الكسري المقترح والتعريف الكلاسيكي المعروف.
- أظهرت الدراسة أن استخدام دالة غاما بدلًا من المضروب العادي يتيح تعريفًا مستمرًا للدوال عند الرتب الكسرية، ويتجاوز القيد التقليدي الذي يقتصر على الرتب الصحيحة فقط.
- تبين أن دوال لاجندر الكسرية تختلف عن دوال لاجندر الكلاسيكية في سلوكها التحليلي، وأنه لا يمكن افتراض انتقال جميع خصائص الحالة الكلاسيكية إلى الحالة الكسرية دون برهان صريح.
- أظهرت الدراسة أن خاصية التعامد ليست خاصية تلقائية للدوال الكسرية، بل تعتمد على اختيار المؤثر الكسري، ونقطة البداية، ودالة الوزن، والشروط الحدية المرافقة للمسألة.
- تبين أن العلاقات التكرارية لدوال لاجندر الكسرية قد تحتفظ بشكلها العام، لكنها قد تتضمن معاملات إضافية أو شروطًا تتعلق برتبة الاشتقاق الكسرية، ولهذا يجب اشتقاقها بشكل مستقل عن الحالة الكلاسيكية.
- أظهرت الدراسة أن دوال لاجندر الكسرية المقترحة لا تُعد تلقائيًا دوال ذاتية لمسائل ستورم–ليوفيل الكسرية، إذ يتطلب ذلك تحديد المؤثر الكسري ومجاله ودالة الوزن والشروط الحدية، ثم إثبات خاصية القيمة الذاتية والتعامد للعائلة المقترحة.
- تبين أن نموذج كابوتو يظهر ملاءمة أكبر عند التعامل مع مسائل القيم الابتدائية، بينما يظهر نموذج ريمان–ليوفيل ملاءمة أكبر عند بناء التعريفات التي تعتمد على التكامل الكسري وصيغ رودريغز، وهو ما يفسر اعتماد هذه الدراسة على مشتقة ريمان–ليوفيل اليسارية.
- أظهرت الدراسة أن الدوال الكسرية المقترحة يمكن أن تشكل أساسًا لبناء حلول تحليلية أو تقريبية للمعادلات التفاضلية الكسرية، شريطة أن تُدرس خصائصها بدقة قبل استخدامها في التمثيلات التسلسلية أو الطرق الطيفية.
- تبين أن دراسة دوال لاجندر الكسرية تسهم في توسيع النظرية الكلاسيكية للدوال الخاصة، وتوفر إطارًا أكثر شمولًا لتمثيل الظواهر التي تتسم بالذاكرة وعدم المحلية وتبدد الطاقة.
- أظهرت الدراسة أهمية المقارنة بين العائلة المقترحة والتعريفات الأخرى لدوال لاجندر الكسرية، وخاصة التعريفات المبنية على مشتقة كابوتو، وذلك لتحديد أوجه التشابه والاختلاف بينها بشكل دقيق.
- تبين أن الدراسة تفتح آفاقًا لاستخدام دوال لاجندر الكسرية في البناء الطيفي للحلول، وطرق غاليركن، والتربيع الطيفي، وحل المعادلات التفاضلية الكسرية في الفيزياء والهندسة والنمذجة الرياضية.

وباختصار يمكن تلخيص أهم النتائج التي توصل إليها الباحثان فيما يأتي:

1- قاما في هذه الدراسة بتعريف دالة لجنيذر الخاصة في سياق التفاضل والتكامل الكسري

2- اقترحا حلا جديد للمعادلة:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\ \frac{d}{dx}\ y(x)\right\}+2x\ \frac{d}{dx}\ y(x)+n(n+1)\ y(x)=0$$

وهوا الدالة

$$P_{n,n-1}(x)=\frac{1}{2^n\ n!}\ D^{n-1}\ (x^2-1)^n$$

بعد ان حققت الخصائص الهامة لدالة لجيندر.

التوصيات

بناءً على نتائج الدراسة واستنتاجاتها، يوصي الباحثان بما يأتي:

- إجراء دراسة تفصيلية لخصائص دوال لاجنذر الكسرية المقترحة.
- دراسة العلاقات التكرارية للدوال الكسرية المقترحة، والتحقق من مدى إمكانية تعميم العلاقات الكلاسيكية أو تعديلها بما يتناسب مع طبيعة المشتقة الكسرية.
- دراسة خاصية التعامد للدوال الكسرية المقترحة، وتحديد دالة الوزن والشروط الحدية المناسبة التي تتحقق فيها هذه الخاصية.
- تحديد المؤثر الكسري المناسب ودالة الوزن والشروط الحدية قبل الحديث عن كون الدوال الكسرية ذاتية لمسائل ستورم–ليوفيل الكسرية.
- إجراء مقارنة تفصيلية بين العائلة المقترحة والتعريفات الأخرى لدوال لاجنذر الكسرية، وخاصة التعريفات المبنية على مشتقة كابوتو، لتحديد أوجه التشابه والاختلاف بينها.
- توظيف الدوال الكسرية المقترحة في بناء حلول تحليلية أو تقريبية للمعادلات التفاضلية الكسرية، بعد التحقق من خصائصها التحليلية والتعامدية.
- تطوير طرق عددية وطيفية تعتمد على دوال لاجنذر الكسرية، مثل طرق غاليركن وطرق التربيع الطيفي، بعد التحقق من خصائص التعامد والتقريب للعائلة المقترحة.
- توسيع الدراسة لتشمل دوال لاجنذر المرتبطة، ودوال لاجنذر المعممة، ودوال جاكوبي الكسرية، لدراسة العلاقة بين هذه العائلات في الإطار الكسري.
- تطبيق النتائج النظرية في نمذجة ظواهر فيزيائية وهندسية تتسم بتأثير الذاكرة، مثل انتشار الحرارة، والتخامد، وانتشار الملوثات، وتبدد الطاقة، والأنظمة الديناميكية غير الخطية.
- إجراء مقارنات كمية بين الحلول الكلاسيكية والحلول الكسرية، لبيان أثر تغير رتبة الاشتقاق الكسرية على سلوك الحل ودقته واستقراره.

Reference

1. Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13*(5), 529–539. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x
2. El-Sayed, A. M. A. (1993). On the fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation, 55*(1), 1–12.
3. El-Sayed, A. M. A. (1995). Fractional order evolution equations. *Journal of Fractional Calculus, 7*, 89–100.
4. El-Sayed, A. M. A. (1999). Fractional order evolutionary integral equations. *Applied Mathematics and Computation, 98*(2–3), 139–146. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(98)00098-8[dl.acm][academic.oup]
5. El-Sayed, A. M. A., El-Sayed, W. G., & Moustafa, O. L. (1995). On some fractional functional equations. *Pure Mathematics and Applications, 6*(4), 321–332.[taylorfrancis]
6. El-Sayed, A. M. A. (1997). On some basic properties and applications of the fractional calculus. *Pure Mathematics and Applications, 8*(2–3–4), 247–259.

7. Gómez-Aguilar, J. F., & Atangana, A. (Eds.). (2022). *Applications of fractional calculus to modeling in dynamics and chaos* (1st ed.). Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/9781003006244[dl.acm]
8. Macías-Díaz, J. E. (2022). Fractional calculus—Theory and applications. *Axioms, 11*(2), 43. https://doi.org/10.3390/axioms11020043
9. Paknazar, M., & De la Sen, M. (2021). Fractional coupled hybrid Sturm–Liouville differential equation with multi-point boundary coupled hybrid condition. *Axioms, 10*(3), 65. https://doi.org/10.3390/axioms10030065
10. Ferrás, L. L. (2025). Fractional derivatives: The ultimate operator for modelling complex viscoelastic materials? *Fractional Calculus and Applied Analysis, 28*, 2799–2848. https://doi.org/10.1007/s13540-025-00449-7
11. Hilfer, R., & Kleiner, T. (2024). Fractional calculus for distributions. *Fractional Calculus and Applied Analysis, 27*, 2063–2123. https://doi.org/10.1007/s13540-024-00306-z
12. Kostić, M. (2024). Multidimensional fractional calculus: Theory and applications. *Axioms, 13*(9), 623. https://doi.org/10.3390/axioms13090623
13. Rabiei, F., Kim, D., & Ali, Z. (2025). Fractional mathematical modelling: Theory, methods and applications. *Fractal and Fractional, 9*(10), 636. https://doi.org/10.3390/fractalfract9100636
14. Mendiola-Fuentes, J., Guerrero-Ruiz, E., & Rosales-García, J. (2024). Multivariate Mittag-Leffler solution for a forced fractional-order harmonic oscillator. *Mathematics, 12*(10), 1502. https://doi.org/10.3390/math12101502
15. Zhang, H., Hao, Z., & Bohner, M. (2024). Multiple and nonexistence of positive solutions for a class of fractional differential equations with p-Laplacian operator. *Mathematics, 12*(23), 3869. https://doi.org/10.3390/math12233
16. Kazem, S., Abbasbandy, S., & Kumar, S. (2013). Fractional-order Legendre functions for solving fractional-order differential equations. Applied Mathematical Modelling, 37(7), 5498–5510. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.10.026
17. Zayernouri, M., & Karniadakis, G. E. (2013). Fractional Sturm–Liouville eigen-problems: Theory and numerical approximation. Journal of Computational Physics, 252, 495–517. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.06.031
18. Zayernouri, M., Ainsworth, M., & Karniadakis, G. E. (2015). Tempered fractional Sturm–Liouville eigenproblems. SIAM Journal on Scientific Computing, 37(4), A1777–A1800. https://doi.org/10.1137/140985536
19. Machado, J. A. T., & Kiryakova, V. (2021). A guide to special functions in fractional calculus. Mathematics, 9(1), 106. https://doi.org/10.3390/math9010106
20. Olver, F. W. J., et al. (Eds.). NIST Digital Library of Mathematical Functions, Chapter 14: Legendre and Related Functions; Chapter 18: Orthogonal Polynomials. National Institute of Standards and Technology. https://dlmf.nist.gov/14 ; https://dlmf.nist.gov/18