Comprehensive Journal of Science
Volume (11), Issue (41), (JUNE, 2026)
ISSN: 3014-6266

مجلة العلوم الشاملة
المجلد (11) ملحق العدد 41 يونيو 2026
ردمد: 3014-6266

مقارنة عددية بين تكامل رومبرق وطريقة شبه المنحرف باستخدام الاستكمال الخارجي لريتشاردسون

سوسن سالم الاربش
جامعة الزاوية / كلية التربية العجيلات – ليبيا - قسم الرياضيات
s.alarbash@zu.edu.ly
https://orcid.org/0009-0007-1160-8416

Numerical Comparison Between Roemberg Integral and Trapezoidal Method Using Richardson's External Interpolation

Sawsan Salem Al-Arbash
University of Zawiya / Faculty of Education, Ajilat – Libya - Department of Mathematics

تاريخ الاستلام:2026/06/30 –تاريخ المراجعة:2026/07/18– تاريخ القبول: 2026/07/28– تاريخ للنشر: 16/ 8/ 2026

الملخص:
تهدف هذه الدراسة الي مقارنة شاملة بين أهم طرائق التكامل العددي وهما تكامل رومبرق وطريقة شبه المنحرف وذلك لتعطي تقريب أولي , ثم نطبق عملية الاستكمال الخارجي لريتشاردسون الذي يستعمل كثيرا لإيجاد نتائج ذو قيمة عالية واستخدام حلول ذو رتب أقل .
تعتمد الدراسة على استخدام تقنية الاستكمال لتحسين دقة الطرائق العددية بدون الاحتياج الى تصغير الخطوات بشكل كبير حيث تقوم هذه التقنية علي دمج حلين ناتجين عن طريقتين مختلفتين, وذلك لإلغاء حد الخطأ السائد ومن ثم الحصول على حل أكثر دقة .
توصلنا لنتيجة مهمة هي أن طريقة تكامل رومبرق تمتاز بدقة عالية مقارنة بطريقة شبه المنحرف لأن هذه الطريقة تعتمد على تقليل الخطأ العددي شيئاً فشيئاً وكما ادركنا أن زيادة كمية التقسيمات ينتج عنه تحسين التقارب في الطريقتين ولاكن معدل التقارب في طريقة تكامل رومبرق كان أسرع وأكبر دقة فالحل , وتكون أقرب للمعاير الحقيقية لتكامل كما أكدت الدراسة ان الحل باستخدام استكمال ريتشاردسون مع طريقة شبه المنحرف يجعل كمية العمليات التكاملية الحسابية المطلوبة أقل ونتائج أدق .
يوصى بتطبيق النتائج العددية المستخلصة من هذه الدراسة في حل المعادلات التفاضلية أو مسائل هندسيه حقيقه (مثل حساب المساحات , العزوم , أو تدفق الموائع)التي تظهر هذه التكاملات كجزء من الحل وتوسيع نطاق المقارنة مستقلاً ليشمل طرقاً تربيعية اخرى مثل تربيع غاوس $(Gauss\ Quadratura)$.

الكلمات المفتاحية :تكامل رومبرق , طريقة شبه المنحرف , الاستكمال الخارجي لريتشاردسون

1. المقدمة :

قدم ويرنر- رومبرق ($Werner\ Romberg$) طريقة تكامل رومبرق عام 1955م وذلك لإيجاد حلول لمشكلة وجود فراغات كبيرة إما بالزيادة أو بالنقصان بين الخط والمنحنى الحقيقي عند التقريب بخطوط مستقيمة في طريقة شبه المنحرف $(Trapezoidal\ Rule)$ وذلك باستخدام الاستكمال الخارجي لريتشاردسون $(Richardson\ Extrapolation)$ وذلك بالتخلص من حدود الخطأ تدريجياً ورغم ذلك تحتاج طريقة شبه المنحرف إلى تقسيم الفاصل الزمني إلي عدد كبير جداً من الفترات (أي جعل h صغيرة جداً) للوصول إلي دقة عالية وذلك يزيد من الوقت لحساب النتائج[1].
الهدف من هذه الدراسة هو مقارنة عددية لدقة الحلول بين تكامل رومبرق $(Romberg\ Integration)$ وطريقة شبه المنحرف باستخدام الاستقراء الخارجي لريتشاردسون وإثبات التباين والتكافؤ الرياضي بينهما وإظهار سرعة تقارب الحل نحو القيمة الحقيقية لأن المقارنة تبين للمحلل العددي كيف يمكن تحويل طريقة بسيطة ذات دقة منخفضة (طريقه شبة المنحرف) الى أداة فائقة الدقة باستخدام استكمال ريتشاردسون[2].

2.عرض البيانات :

2.1 الاستكمال الخارجي لريتشاردسون $Richardson\ \ Extrapolation$:

يستعمل هذا الاستكمال لتوليد نتائج دقيقة باستخدام صيغ ذو رتب أقل ولفحص اسلوب الاستكمال الخارجي نفترض أن $N(h)$ صيغه تنتج تقريبات ذو رتبة $O(h^2)$ لقيمه غير معلومة M . ومع الافتراض أن شكل الخطأ في تقريب $N(h)$ إلي M يمكن التعبير عنه بالاتي[5]:

$$M = N(h) + k_1h^2 + k_2h^4 + k_3h^6 + \cdots \quad (1)$$

حيث $k_1, k_2, \dots k_n$ ثوابت و $N(h)$ تقريب لقيم غير معلومة (M).

إذا وضعنا $h/2$ بدلا من h في المعادلة (1) ينتج لنا تقريب $N(\frac{h}{2})$ جديد ويكون أكثر دقه وتكون المعادلة على الصورة :

$$M = N\left(\frac{h}{2}\right) + K_1\frac{h^2}{4} + K_2\frac{h^4}{16} + K_3\frac{h^6}{64} + \cdots \quad (2)$$

من المعادلة (1) والمعادلة (2) يتضح لنا إنه يمكن حذف الحد الذي يحتوي على k_1 فتصبح المعادلة:

$$M = [N\left(\frac{h}{2}\right) + \left(N\left(\frac{h}{2}\right)\right) - N(h))] + K_2(\frac{h^2}{2} - h) + k_3(\frac{h^3}{3} - h^3) + \cdots$$

1.2.1 جدول الاستكمال الخارجي :

يتم الحصول علية بعملية إيجاد المتوسط فإن هده الاساليب تنتج تقريب دورتين عاليتين بأقل قيمه للحسابات وخطأ التدوير ولكن بصفة عامة كلما زادت قيمة k فإن خطأ التدوير في $N_1\ (\frac{h}{2^k})$ يزداد ونستخدم الاستكمال الخارجي لاشتقاق الدالة المعطاء إلي حدودية تايلور[3] .

متال 1 :

استخدم جدول الاستكمال الخارجي لحساب المشتقة الاولى للدالة $f(x) = \ln(x)$ عند النقطة $x = 1$ ادا كان $h = 0.4$

الحل

نستخدم صيغة الفروق المركزية $(Central\ \ Difference)$ كأساس لتقريب :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

نبدأ بقيمة h

عندما $h = 0.4$ عند النقطة $x = 1$:

$$f'(1) = \frac{ln(1+0.4) - ln(1-0.4)}{2 \times 0.4} = \frac{ln(1.4) - ln(0.6)}{0.8}$$

$$= \frac{0.336472 - (-0.510826)}{0.8} = 1.059122$$

عندما $\frac{h}{2} = 0.2$

$$N_1(0.2) = \frac{ln(1.2) - ln\ (0.8)}{2 \times 0.2} = \frac{0.182322 - (-0.223144)}{0.4} = 1.013663$$

نقوم باستقراء ريتشاردسون للعمود الثاني لتحسين دقة الحل بين $N_1(0.4)$ و $N_1(0.2)$:

$$N_2(0.4) = \frac{4 \times N_1(0.2) - N_1(0.4)}{3} = \frac{4(1.013663) - 1.059122}{3} = 0.998510$$

عندما $\frac{h}{4} = 0.1$

$$N_1(0.1) = \frac{ln(1.1) - ln\,(0.9)}{2 \times 0.1} = \frac{0.095310 - (-0.105361)}{0.2} = 1.003353$$

$$N_2(0.2) = \frac{4 \times N_1(0.1) - N_1(0.2)}{3} = \frac{4(1.003353) - 1.013663}{3} = 0.999916$$

الان نستخدم قيم القيود في العمود الثاني لاستخراج قيم العمود الثالث :

$$N_3(0.4) = \frac{16 \times N_2(0.2) - N_2(0.4)}{15} = \frac{16(0.999916) - 0.998510}{15} = 1.000010$$

الان نرتب الارقام في جدول ريتشاردسون :

h حجم الخطوة	$O(h^2)$ التقريب الاولي	$O(h^2)$ التحسين الاول	$O(h^6)$ التحسين الثاني
0.4	1.059123		
0.2	1.013663	0.998510	
0.1	1.003353	0.999916	
			1.000010

نلاحظ أن القيمة الاخيرة 1.000010 دقيقة ونسبة الخطأ فيها تكاد معدومة مقارنة بالتقريب الاول 1.059123 .

2.2 تكامل رومبرق *Romberg Integration*:

تكامل رومبرق هو تكامل عددي استخدمنا فيه الاستكمال الخارجي لريتشاردسون لتحسين التقريبات الابتدائية ولتقريب التكاملات المحدودة[4].

لنوضح طريقة تكامل رومبرق علينا توضيح أن تقريب تكامل دالة f على الفترة $[a,b]$ باستخدام n هو :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(X_i)\right] - \frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\mu) \qquad (3)$$

حيث:

$$h = \frac{(b-a)}{n} \quad , \quad a < \mu < b \quad , \quad X_i = a + ih \quad , \quad i = 0,1,2, \ldots . n$$

ليكن k عدداً صحيحاً موجباً وأن أول خطوة في تكامل رومبرق هي التوصل الي التقريبات الأتية:

$$n_k = 2^{k-1} \quad , \quad n_1 = 1 \quad , \quad n_2 = 2 \quad , \quad n_3 = 4 \quad , \ldots \ldots$$

وإن الخطوة h_k المقابلة إلى n_k هي :

$$h_k = \frac{(b-a)}{n_k} = \frac{(b-a)}{2^{k-1}}$$

بعد استخدام هده الرموز نستنتج أن :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h_k}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\left(\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k)\right)\right] - \frac{(b-a)}{12}h_k^2 f''(\mu_k) \qquad (4)$$

حيث أن لكل k يكونμ_k عدداً ما في الفترة (a,b).

إذا استخدمنا الرمز $R_{k,1}$ الذي يعبر عن المعادلة (1) المستخدمة أيضا لتقريب بطريقة شبة المنحرف ولكن في تكامل رومبرق تكون أدق[2]:

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)]$$

$$R_{2,1} = \frac{h_2}{2}[f(a) + f(b) + 2f(a + h_2)]$$

$$= \frac{(b-a)}{4}\left[f(a)+f(b)+2f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[R_{1,1} + h_1 f(a+h_2)]$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}(R_{2,1} + h_2[f(a+h_3)+f(a+3h_3)])$$

وعلية فإن الصيغة تكون على الصورة :

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a+(2i-1)h_k)] \quad , \quad \forall \quad k = 1,2 \ldots . n$$

عند استخدام هذه الطريقة نحصل على العمود الاول من جدول طريقة رومبرق ويمكن إيجاد باقي الأعمدة من خلال استخدام الاستكمال الخارجي لريتشاردسون لذا تكون الصيغة لإيجاد باقي الأعمدة بهدة الصيغة :

وهكذا $R_{2,2}\ , R_{3,2}\ , R_{4,2}\ , \ldots .$

$$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{1}{3}\left(R_{k,1} - R_{k-1,1}\right) \quad , \quad \forall \quad k = 2,3, \ldots , n$$

ونحصل على العمود الثالث باستخدام الصيغة :

وهكذا $R_{3,3}\ , R_{4,3}\ , R_{5,3}, \ldots . .$

$$R_{k,3} = R_{k,2} + \frac{1}{15}\left(R_{k,2} - R_{k-1,2}\right) \quad , \quad \forall \quad k = 3,4, \ldots . , n$$

وبدلك نستنتج أن الصيغة العامة تكون:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1}-1} \quad , \quad \forall \quad k = j\ , j+1\ , \ldots .$$

1.2.2 جدول تكامل رومبرق ($Romberg\ Integration\ Table$) :

نستخدم جدول تكامل رومبرق للوصول إلى دقة عالية جداً وذلك بتقسيم الدالة إلى فترات لنصل لدقة بأسطر معدودة ويمكن التوقف عن الحساب بمجرد أن يصبح الفرق بين قيمتين متتاليتين في الجدول أصغر من نسبة الخطأ المسموح بها[4]. والطريقة المستخدمة لإنشاء جدول تكامل رومبرق تحسب المدخلات صفاً يلو الأخر على الترتيب متل :

وهكذا ... ... $R_{1,1}\ , R_{2,1}\ , R_{2,2}\ , R_{3,1}\ , R_{3,2}\ , R_{3,3}$

k	$o(h_k^2)$	$o(h_k^4)$	$o(h_k^6)$	$o(h_k^8)$	$\cdots$	$o(h_k^{2n})$
1	$R_{1,1}$					
2	$R_{2,1}$	$R_{2,1}$				
3	$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
4	$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n	$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	$\cdots$	$R_{n,n}$

2.2.2 خوارزمية تكامل رومبرق $Romberg\ Integration\ Algorithm$:

تعتمد طريقة تكامل رومبرق على سرعة التقارب إذا كانت الدالة ملساء وقابلة للاشتقاق فإن الخوارزمية تقلل الخطأ بشكل ملحوظ وذلك باستخدام استقراء ريتشاردسون[3].

خطوات الخوارزمية :

لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)dx$

نختار عدد موجب $n > 0$

الادخال نقطتي النهاية $a\ , b$, عدد صحيح n .

الاخراج سهم R ($R_{n,n}$ هو تقريب لتكامل I , محسوب بالأسهم فقط سهمين يتم تخزينها في المخزن)

خطوة 1 نضع $h = b - a$:

$$R_{1,1} = \frac{h(f(a) + f(b))}{2}$$

خطوة 2 الإخراج $(R_{1,1})$

خطوة 3 نفرض أن $i = 2,3, \ldots\ldots, n$ نعمل الخطوات من 4 إلي 8 .

خطوة 4 نضع $R_{2,1} = \frac{1}{2}[R_{1,1} + h\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a + (k - 0.5)h)]$

متال 1:

استخدم طريقة تكامل رومبرق لإيجاد تكامل الدالة $f(x) = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ وعدد الفترات $n = 6$

الحل

$$\mathrm{R}_{\mathbf{1,1}} = \frac{\pi}{\mathbf{2}}[\sin(0) + \sin(\pi)] = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}R_{1,1} + \frac{\pi}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \approx 1.57079633$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}R_{2,1} + \frac{\pi}{4}\left[sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] \approx 1.89611890$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}R_{3,1} + \frac{\pi}{8}\left[sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) + sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right] \approx 1.97423160$$

وبالمثل نستخرج بقية قيم الصفوف :

$R_{5,1} \approx 1.99357034$

$R_{6,1} \approx 1.99839336$

متال 2

أوجد قيمة $\int_1^{1.30} \sqrt{x}dx$ باستخدام تكامل رومبرق علما أن عدد الفترات $n = 4$

الحل

2	**1**	**0**	i
1.30	1.15	1	x_i
1.14017	1.07238	1	$f_i = f(x_i)$

عندما $n = 1$

$$h = \frac{1.30 - 1}{1} = 0.3$$

$$R_{1,1} = \int_1^{1.30} \sqrt{x}\ dx = \frac{h}{2}[f_0 + f_2] = \frac{0.3}{2}[1 + 1.14017] = 0.321026$$

عندما $n = 2$

$$h = \frac{1.30 - 1}{2} = 0.15$$

$$R_{2,1} = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + f_2] = \frac{0.15}{2}[1 + 2(1.07238) + 1.14017) = 0.321370$$

عندما $n = 4$

$$h = \frac{1.30 - 1}{4} = 0.075$$

4	3	2	1	0	i
1.30	1.225	1.15	1.075	1	x_i
1.14017	1.10680	1.07238	1.03682	1	$f_i = f(x_i)$

حسب الجدول يكون الحل :

$$R_{3,1} = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4]$$

$$= \frac{0.075}{2}[1 + 2(1.03682) + 2(1.07238) + 2(1.10679) + 1.14017] = 0.321456$$

$$R_{2,2} = \frac{4(R_{2,1}) - R_{1,1}}{3} = \frac{4(0.321370) - 0.321026}{3} = 0.3214848$$

$$R_{3,2} = \frac{4(R_{3,1}) - R_{2,1}}{3} = \frac{4(0.321456) - 0.321370}{3} = 0.32148534$$

$$R_{3,3} = \frac{16(R_{3,2}) - R_{2,2}}{15} = \frac{16(0.3214847) - 0.3214848}{15} = 0.32148537$$

$$\therefore \int_1^{1.30} \sqrt{x}\ dx \approx R_{3,3} = 0.32148537$$

3.2 طريقة شبه المنحرف ***Trapezoidal Rule***:

إن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة إنها تعتمد على تقريب المساحة المحصورة تحت منحني الدالة $f(x)$ وذلك بتقسيمها إلي مجموعة من أشكال شبه المنحرف الهندسي بدلاً من التقريب باستخدام المستطيلات التقليدية وبذلك يقدم تقديراً أكثر دقة للمساحة الكلية[5].

لإيجاد القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x)$ على الفترة $[a\,,b]$:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx$$

عندما نستخدم طريقة شبة المنحرف نتبع الخطوات التالية :

1- نجزئ الفترة بين (a, b) إلى n من الفترات الجزئية متساوية الأطوال حيث أن h طول كل منها وتحسب قيمة h كالاتي :

$$h = \frac{b - a}{n}$$

إذا وجد المنحني $y = f(x)$ فإنه ينتج منه n من الشرائح وكل شريحة منها تأخذ شكلاً قريبا من شبه المنحرف وبذلك يمكن حساب مساحة الشريحة A_1 بطريقة قاعدة شبه المنحرف:

$$A_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

2- لحساب المساحة الكلية التقريبية المحصورة تحت منحني الدالة فإننا نجد مجموع مساحات الشرائح $A_1, A_2, \ldots., A_n$ وكما يلي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$$

$$= \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$$

علماً أن قيمة التكامل تعتمد علي عدد الشرائح الناتجة من تقسيم مساحة المنحنى فإنه كلما زاد عدد الشرائح n (أي صغرت قيمة h) وازداد ناتج التكامل وعليه فإنه يمكننا مضاعفة n بعد كل عملية تكامل حتي يصبح الفرق بين الجواب والجواب الذي يليه صغيراً جداً ونستطيع إيجاد مساحة شبه المنحرف باستخدام القانون $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ حيث أن $f(a)$, $f(b)$ هما الضلعان المتوازيين لشبه المنحرف[4].

متال 3:

باستخدام قاعدة شبه المنحرف أوجد قيمة $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ مقرباً لخمس مراتب عشرية علماً بأن $n = 6$.

الحل :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$$

بما إن $n = 6$ فإننا نوجد قيمة h باستخدام القانون:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	i
1	5/6	4/6	3/6	2/6	1/6	0	x_i
0.5	0.59016	0.69231	0.80000	0.90000	0.97297	1	$\mathbf{y_i = f(x_i)}$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{12}[1 + 2\{0.9729 + 0.9 + 0.8 + 0.6923 + 0.5901\} + 0.5] = 0.78424$$

3. النتائج :

عند دمج استكمال ريتشاردسون مع طريقة شبه المنحرف فإنه يمتل أداة قوية جدا لرفع كفاءة التكاملات العددية للدوال الناعمة (السلسة) دون الحاجة لزيادة كتيره في تقسيم الفترات وأيضا عند استخدام الاستكمال مع تكامل رومبرق فإن التكلفة الحسابية تكون عمليات جبرية بسيطة مقارنه بطريقة شبه المنحرف فإن تكلفتها تكون عالية لتقييم الدوال المعقدة لألاف المرات , نوضح في الجدول التالي مقارنة بين الخطأ المطلق $(Absolute\ Error)$ لطريقة شبه المنحرف وتكامل رومبرق مع اختبار زيادة عدد التقسيمات للفترات (n) :

عـــــــــدد التقسيمات(n)	**خطـوة الحـل (h)**	**تقريـــب شـــبه المنحرف**	**الخطـــأ المطلـــق لشبه المحرف**	**تقريب رومبرق**	**الخطـأ المطلـق لرومبرق**
$n = 1$	1.0	1.859140914	1.41×10^{-1}	1.859140914	1.41×10^{-1}
$n = 2$	0.5	1.753931092	3.56×10^{-2}	1.718861151	5.79×10^{-4}
$n = 4$	0.25	1.727221904	8.94×10^{-3}	1.718282688	8.59×10^{-7}

1.56×10^{-9}	1.718281830	2.24×10^{-3}	1.720518592	0.125	$n=8$
$<10^{-12}$	1.718281828	5.59×10^{-4}	1.718841138	0.0625	$n=16$

من خلال النتائج السابقة نلاحظ أن :

- طريقة شبه المنحرف في كل مرة يتم فيها مضاعفة عدد الفترات $(n \to 2n)$ ويقل الخطأ فيها بمقدار الأربعة تقريباً وهذا يتوافق تماماً مع النظرية الرياضية أن معلومية خطأ شبه المنحرف هو من الرتبة $O(h^2)$.
- تكامل رومبرق عند $n=8$ اعطي قيمة دقيقة جداً , ووصفت طريقة تكامل رومبرق لتقريب بدقة تصل إلي 10^{-9} , ومنها نلاحظ أن في نفس الفترة احتفظت طريقة شبه المنحرف بخطأ في حدود 10^{-3} .
- باستخدام طريقة شبه المنحرف للوصول الي دقة تبلغ 10^{-9} نحتاج إلي تقسيم الفترة إلى أكثر من 30,000 فترة ودلك يعني حساب قيمة الدالة 30,000 مرة .
- بمقارنة خوارزمية رومبرق مع طريقة شبه المنحرف فإن خوارزمية رومبرق تصل إلي نفس بل وأفضل لأنه يستخدم 8 فترات فقط (أي 9 تقييمات للدالة فقط) مما يقلل الجهد الحسابي والمدة المستغرقة للحل .

4. التوصيات :

من أجل استكمال الجهود العلمية في مجال التكاملات العددية وسد الثغرات المعرفية نقدم عدداً من التوصيات والتوجيهات البحثية المستقبلية التي نوصي الباحثين بالتركيز عليها :

-1 عند استخدام خوارزمية تكامل رومبرق نوصي باستخدامها مع تقنيات الخطوة المختلفة $(Adaptive\ Quadrature)$ وذلك لأن البرنامج يقوم بتغيير طول الفترة h بناءاً علي قيمة الدالة بعدها نطبق استكمال ريتشاردسون مما ينتج أعلى دقة بأقل تكلفة حسابية .

-2 من خلال البحث استنتجنا إن طريقة شبه المنحرف تتطلب حساب قيم الدالة عند نقاط متعددة فبذلك نوصي باستغلال المعالجات متعددة الانوية $(Multi-core\ Processors)$ لحساب الأعمدة بشكل متوازي لتسريع النتائج في التكاملات متعددة الأبعاد .

-3 نوصي بتعمق نطاق البحث لتطبيق استكمال ريتشاردسون الخارجي علي تكاملات عددية اخري مثل قاعدة سيمبسون$(Simpson's\ Rule)$ واستخدامه أيضاً في قاعدة نقطة المنتصف $(Midpoint\ Rule)$ ومقارنة النتائج المتحصل عليها مع تكامل رومبرق .

-4 نوصي باستخدام برمجه خوارزمية ذكية لا تقسم الفترة $[a,b]$ بالتساوي بل ندرس الفترة عبر تقدير المشتقة الثانية عددياً في المناطق ذات الانحناء العالي وفي المناطق شبه الخطية تترك الفترات واسعة وبعد ذلك نستخدم استكمال ريتشاردسون .

-5 بما أن عند حساب المساحات في طريقة شبة المنحرف تكون العمليات مستقلة عند كل نقطة x_i فنوصي ببرمجة هذا الجزء باستخدام تقنيات الحوسبة المتوازية CUDA أو OpenMP فبذلك تتم توزيع حسابات قيم الدالة $n=2^{10}$ تكون نقطة علي مئات النقاط المعالجة معاً , تم نمرر النتيجة التي توصلنا لها إلي المعالج الرئيسي (CPU) وبعدها نقوم باستخدام استكمال ريتشاردسون .

-6 درسنا في بحثنا كفاءة الطريقتين بتكاملات محدودة ولاكن نوصي بتوسيع المقارنة العددية لتضم تكاملات ذات الحدود اللانهائية مثل $\int_0^{\infty} f(x)dx$ وذلك بعد تحويلها برمجياً إلي فترات مغلقة ومقارنة مدى صمود استكمال ريتشاردسون في تسريع التقارب عند الحدود البعيدة .

المراجع :

1. Bialecki, R., & Dziubek, T. (2016). Richardson extrapolation applied to automated numerical integration. *Computers & Mathematics with Applications, 72(4), 1012-1025.*
2. Burden, R. L., & Faires, J. D. (2015). *Numerical Analysis* (10th ed.). Cengage Learning.

3. Cools, R., & Nuyens, D. (Eds.). (2016). *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods.* Springer.
4. 4-Davis, P.J., & Rabinowitz, P. (2007). *Methods of Numerical Integration* (2nd ed.). Dover Publications.
5. Sidi, A. (2012). A User-friendly extrapolation method for economic quadrature of singular integrals. *Applied Mathematics*, 3(2), 143-155.