Comprehensive Journal of Science
Volume (10), Issue (38), (Dec, 2025)
ISSN: 3014-6266

مجلة العلوم الشاملة
المجلد (10) ملحق العدد 38 ديسمبر 2025
ردمد: 3014-6266

استخدام متسلسلات تايلور في تقريب قيم الدوال الأساسية: دراسة لأنواع التقارب وحدود الخطأ

منال عبدالسلام عاشور
قسم الرياضيات – كلية التربية– ابي عيسي
جامعة الزاوية
m.ashour@zu.edu.ly
انتصار عثمان محمود
قسم الرياضيات – كلية العلوم
جامعة الزاوية

تاريخ الاستلام:2025/12/8 –تاريخ المراجعة: 2025/12/12– تاريخ القبول: 2025/12/19– تاريخ للنشر : 2026 /1/17

الملخص:

تتناول هذه الدراسة استخدام متسلسلات تايلور ، وبخاصة متسلسلات ماكلورين، في تقريب قيم عدد من الدوال الأساسية. وتركّز على تحليل طبيعة التقارب (النقطي والمنتظم) لكثيرات الحدود الجزئية على مجالات قريبة من نقطة التوسع، مع اشتقاق حدود علوية لخطأ القطع اعتمادًا على صيغة لاغرانج للباقي. كما تدعم النتائج النظرية بتحقق عددي مبسّط يبرز العلاقة بين الحدود النظرية للخطأ والقيم الفعلية المحسوبة، مبيّنةً أثر رتبة القطع واختيار المجال على دقة التقريب.

الكلمات المفتاحية: متسلسلات تايلور ، متسلسلات ماكلورين، التقارب النقطي، التقارب المنتظم، حدّ الخطأ.

Abstract:

This study examines the use of Taylor series, particularly Maclaurin series, to approximate values of selected elementary functions. It focuses on analyzing the nature of convergence (pointwise and uniform) of partial Taylor polynomials on intervals near the expansion point and on deriving upper bounds for truncation error using the Lagrange remainder formula. The theoretical results are supported by simplified numerical verification, highlighting the relationship between theoretical error bounds and actual computed errors, and clarifying the effect of truncation order and interval selection on approximation accuracy.

Keywords: Taylor series, Maclaurin series, pointwise convergence, uniform convergence, error bound.

1. المقدمة

تُعد متسلسلات تايلور من الأدوات المحورية في التحليل الرياضي والتقريب العددي للدوال، إذ تُمكّن من تمثيل دالة قابلة للاشتقاق في جوار نقطة a على هيئة متسلسلة قوى تُبنى من مشتقات الدالة عند تلك النقطة. ويكتسب هذا التمثيل قيمة علمية وتطبيقية كبيرة لأنه يحوّل التعامل مع الدوال التي قد يكون تقييمها المباشر أو تحليلها في صورة مغلقة أمرًا غير ميسور دائمًا إلى التعامل مع كثيرات حدود يسهل حسابها وإدارتها جبريًا. وتظهر فاعلية ذلك في سياقات متعددة

مثل الحســـابات العلمية، والتحليل العددي، والنمذجة الرياضـــية، حيث تُســـتخدم كثيرات الحدود الجزئية الناتجة عن قطع المتسلسلة عند رتبة معينة لتقدير قيم الدوال، أو لبناء نماذج محلية لسلوكها، أو لتبسيط تعابير رياضية تتضمنها.

غير أن الاستخدام المنهجي لمتسلسلات تايلور لا يقتصر على اشتقاق المتسلسلة فحسب، بل يرتبط ارتباطًا وثيقًا بدراسة خصائص التقارب وحدود الخطأ الناتجة عن قطع المتسلسلة. فالتقريب بواسطة كثير حدود $T_n(x)$ يصبح ذا معنى علمي عندما يمكن توصـــيف مدى اقترابه من $f(x)$ على مجال معين، وكيف تتغير الدقة بتغير الرتبة nوبالابتعاد عن نقطة التوسع. وفي هذا السياق تُعد مفاهيم التقارب—وخاصة التقارب النقطي والتقارب المنتظم أساسية؛ إذ يضمن التقارب النقطي اقتراب $T_n(x)$من $f(x)$ لكل نقطة على حدة، بينما يقدّم التقارب المنتظم ضـــمانًا أقوى يتمثل في التحكم بالخطأ بصـــورة موحّدة على مجال كامل، وهو ما يرتبط بنتائج مهمة مثل إمكانية تبادل العمليات الحدّية مع التكامل أو الاشـــتقاق تحت شروط مناسبة. ومن جهة أخرى، فإن تقدير الخطأ يتطلب الاستناد إلى صيغة الباقي (Remainder Term) التي تصـــف الفرق $f(x) - T_n(x)$ بدلالة مشـــتقة أعلى للدالة، الأمر الذي يتيح بناء حدود علوية للخطأ يمكن اســـتخدامها لضـبط الدقة المطلوبة مسبقًا، سـواء عند نقطة بعينها أو على مجال كامل عبر اسـتخدام تقديرات عظمى للمشـتقات على ذلك المجال.

وتركّز هذه الدراسة على استخدام متسلسلات تايلور (وبخاصة متسلسلات ماكلورين عند $a = 0$ لتقريب مجموعة مختارة من الدوال الأساسية، مع تحليل طبيعة التقارب على مجالات قريبة من نقطة التوسع، واستخراج حدود علوية للخطأ اعتمادًا على صيغة الباقي. كما تُدعم النتائج النظرية بتحقق عددي مبسّط يعتمد على جداول قيم مختارة ورسوم توضيحية محدودة، بهدف إبراز العلاقة بين الحدود النظرية للخطأ والخطأ الفعلي في أمثلة ممثلة.

وقد تناولت بعض الدراسات العربية هذا الموضوع من زوايا قريبة، مثل الزيداني وأبوشحمة (2019)، والشويرف (2025).

1.1 مشكلة الدراسة

تتمثل المشـــكلة الرئيســـة في توصـــيف مدى موثوقية كثيرات حدود تايلور الجزئية $T_n(x)$ في تقريب الدوال الأساسية ضمن مجال محدد، وتحديد طبيعة التقارب المرتبط بهذا التقريب، وبناء حدود خطأ عملية قابلة للحساب عند قطع المتسلسلة.

1.2 أسئلة الدراسة

1. ما شروط تحقق التقارب لمتسلسلات تايلور للدوال الأساسية المختارة على المجالات المدروسة، وما طبيعة هذا التقارب (نقطي/منتظم) ضمن تلك المجالات؟
2. كيف يمكن اشـتقاق حد علوي للخطأ $|f(x) - T_n(x)|$ باسـتخدام صـيغة الباقي (صـيغة لاغرانج)، وبصـورة تصلح للتطبيق على مجال كامل؟
3. ما مدى اتســـاق الحدود النظرية للخطأ مع الخطأ الفعلي المحســـوب عدديًا عند اختيار رتب n ونقاط x ممثلة داخل المجال؟

1.3 أهداف الدراسة

1. اشتقاق كثيرات حدود تايلور الجزئية حول نقطة توسع ثابتة (غالبًا $a = 0$) لعدد من الدوال الأساسية، مثل: e^x، $\sin(x)$، $\cos(x)$، و$\ln(1 + x)$.
2. تحليل التقارب على مجالات مختارة قريبة من نقطة التوســـع، مع تمييز ما يمكن إثباته على مســـتوى التقارب النقطي وما يمكن دعمه على مستوى التقارب المنتظم عندما تتوفر شروطه.

3. بناء حدود علوية للخطأ اعتمادًا على صيغة الباقي، ثم مقارنة **هذه الحدود** بالخطأ الفعلي في تحقق عددي مبسّط يعتمد على جداول ورسوم توضيحية محدودة.

1. الإطار النظري

يعرض هذا القسم الأسس النظرية اللازمة لبناء التقريب بمتسلسلات تايلور وتحليل سلوكه، وذلك عبر:

(1) تعريف كثيرة حدود تايلور والمتسلسلة المرتبطة بها.

(2) خصائص متسلسلات القوى ونصف قطر التقارب.

(3) أنماط التقارب ذات الصلة بمتتاليات الدوال وسلاسل الدوال.

(4) صيغة الباقي (حد الخطأ) بوصفها أداة معيارية لضبط خطأ القطع. ويُراعى هنا تقديم التعريفات والنتائج العامة فقط، دون اشتقاق متسلسلات الدوال المختارة، لأن ذلك يُخصّص له جزء مستقل لاحقًا.

2.1 متسلسلة تايلور وكثيرة حدود تايلور

لتكن f دالة معرفة على مجال يحتوي النقطة a، وقابلة للاشتقاق حتى الرتبة nفي جوار a. تُعرَّف كثيرة حدود تايلور من الرتبة n حول a بالصيغة:

$$T_n(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

وتُعد $T_n(x;a)$ تقريبًا محليًا للدالة قرب a، إذ تتماثل مشتقات T_n مع مشتقات f عند a حتى الرتبة n. (بارتل، 1981؛ جهيمة، 2006)

أما متسلسلة تايلور حول a فتُعطى (شكليًا) على هيئة متسلسلة قوى:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

ومع أن هذه الصيغة تُكتب دائمًا متى وُجدت مشتقات الدالة، فإن مساواة الدالة بحد كثيرات الحدود الجزئية

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x;a)$$

ليست حقيقة تلقائية، بل تتطلب تحقق التقارب وكون الباقي

$$R_n(x;a) = f(x) - T_n(x;a)$$

يؤول إلى الصفر ضمن مجال مناسب (Rudin, 1976). وتُسمّى الحالة الخاصة $a = 0$ متسلسلة ماكلورين (Apostol, 1967).

2.2 متسلسلات القوى ونصف قطر التقارب

تُسمّى المتسلسلة

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

متسلسلة قوى حول a. من النتائج الأساسية في نظرية متسلسلات القوى وجود عدد $R \in [0,\infty]$ يُسمّى نصف قطر التقارب بحيث:

- تتقارب المتسلسلة تقاربًا مطلقًا لكل x يحقق $|x-a|<R$،
- وتتباعد لكل $|x-a|>R$،
- بينما تتطلب حالة $|x-a|=R$ دراسة مستقلة بحسب معاملات المتسلسلة

وتُعد الخاصـــية التالية ذات أهمية مباشـــرة عند اســـتخدام تايلور في التقريب: على أي مجال مغلق داخل دائرة التقارب من : $|x-a|\le r<R$، تتقارب متسلسلة القوى عادةً تقاربًا منتظمًا. وهذا يمنح تحكمًا موحدًا في الخطأ داخل ذلك المجال، ويُعد أســاسًــا نظريًا لتبرير "ضــمان الدقة" على مجال كامل بدلًا من الاكتفاء بنقاط منفردة (Bartle & Sherbert, 2011).

2.3 أنماط التقارب ذات الصلة بمتتاليات الدوال وسلاسل الدوال

يعتمد توصـــيف جودة تقريب تايلور في هذه الدراســـة على تمييز دقيق بين أنماط التقارب. ولتكن $\{S_n\}$ متتالية دوال على مجال D.

(1) التقارب النقطي تقال $S_n \to S$ نقطيًا على D إذا تحقق:

$$\forall x \in D: \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

ويمثل هذا النمط تقاربًا "عند كل نقطة"، لكنه لا يضــمن أن يكون الخطأ صــغيرًا بالقدر نفســه عبر المجال كله (علاب، 2010).

(2) التقارب المنتظم تقال $S_n \to S$ بانتظام على D إذا تحقق:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |S_n(x)-S(x)| = 0.$$

ويُعد التقارب المنتظم أقوى من النقطي؛ لأنه يوفّر حدًّا موحدًا للخطأ على المجال، وهو شـــرط محوري في نتائج تبادل النهاية مع عمليات التحليل (مثل التكامل والاشتقاق) تحت فروض معيارية (Bartle & Sherbert, 2011).

(3) التقارب المطلق لســلاسـل الدوال. لسلسـلة دوال $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$، يُقال إنها تتقارب تقاربًا مطلقًا عند x إذا كانت $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k(x)|$ متقاربة. وبالنسبة لمتسلسلات القوى داخل نصف قطر التقارب، فإن التقارب المطلق يعد خاصية معيارية (Rudin, 1976).

(4) اختبار فايرشـــتراس إذا وُجدت أعداد $M_k \ge 0$ بحيث $|u_k(x)| \le M_k$ لكل $x \in D$، وكانت $\sum M_k$ متقاربة، فإن $\sum u_k(x)$ تتقارب تقاربًا منتظمًا على D (بارتل، 1981)، وتُســتخدم هذه الفكرة لاحقًا لإســناد التحكم الموحد بالخطأ عند دراسة التقارب على مجالات مغلقة داخل نصف القطر.

2.4 مبرهنة تايلور وحدّ الباقي

يُعرَّف **باقي تايلور** (حدّ الخطأ الناتج عن قطع المتسلسلة) عند الرتبة n كما يلي:

$$R_n(x;a) = f(x) - T_n(x;a).$$

وتقدم **مبرهنة تايلور** صـيغًا للباقي تحت شـروط اشـتقاق مناسـبة. من أكثرها اسـتعمالًا في ضـبط الخطأ **صـيغة لاغرانج للباقي:** إذا كانت f قابلة للاشتقاق حتى الرتبة $n+1$ على فترة تحتوي a وx، فهناك عدد c بين a وx بحيث:

$$R_n(x;a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

وتُستنتج منها مباشرةً حدود علوية عملية للخطأ. فإذا وُجد M بحيث

$$| f^{(n+1)}(\xi) | \leq M \text{ لكل } \xi \in I$$

حيث Iفترة تحتوي a وx، فإن:

$$| R_n(x; a) | \leq \frac{M}{(n+1)!} | x - a |^{n+1}.$$

وتُظهر هذه المتباينة العلاقة البنيوية بين: رتبة القطع n، وبُعد النقطة xعن a، وسلوك المشتقة العليا للدالة، وهي العلاقة التي تُبنى عليها تقديرات الخطأ على المجال في الأجزاء التطبيقية من الدراسة (Faires, & Burden, 2016).

5.2 الدراسات السابقة

تناولت عدد من الدراسات الحديثة موضوع استخدام متسلسلات تايلور والمتسلسلات اللانهائية في التحليل العددي وتقريب الحلول، سواء في سياق المعادلات التفاضلية أو في حساب الدوال الابتدائية بكفاءة عالية. وفيما يأتي عرض موجز لأهم هذه الدراسات ذات الصلة بموضوع هذه الورقة:

1. **دراسة Almajbri وآخرين (Almajbri, Mohammed, & Abu-amr, 2024)**

قدّمت هذه الدراسة مراجعة تحليلية لعدد من الأساليب العددية المستخدمة في حل معادلة ريكّاتي التربيعية، مع التركيز على طريقة التحليل بأدوميان (Adomian Decomposition Method) وتوسعات تايلور. استعرض الباحثون الصيغ المختلفة للحلول التقريبية وبيّنوا كيف يمكن تمثيل الحلول في صورة سلاسل لا نهائية، كما أجروا مقارنات عددية بين الحلول التقريبية والحلول التحليلية الدقيقة باستخدام الجداول والرسوم البيانية. وأكدت النتائج أهمية التكامل بين منهجيات السلاسل (ومنها متسلسلات تايلور) وبين الطرق العددية الحديثة في تحسين دقة الحلول ومعرفة سلوك الخطأ في المسائل اللاخطية.

2. **دراسة الشقماني ورفيدة (الشقماني ورفيدة، 2016)**

اهتمت هذه الدراسة بعرض عدد من الطرق العددية لحل منظومة من المعادلات التفاضلية العادية، من بينها طريقة تايلور وطريقة أويلر وبعض التعديلات عليها. وقد بيّنت الباحثتان أن طريقة تايلور تمثّل الأساس النظري لعدد من الخوارزميات العددية، غير أنّ استخدامها المباشر قد يصطدم بصعوبات عملية تتعلق بحساب المشتقات العليا للدالة. وقدمت الدراسة مقارنات عددية بين الطرق المختلفة من حيث الدقة والتكلفة الحسابية، مما أبرز مدى الحاجة إلى موازنة عدد حدود متسلسلة تايلور مع حجم الخطأ الناتج، وهو ما يتقاطع مع موضوع هذه الورقة في تحليل حدود الخطأ لتقريبات تايلور على مجالات محددة.

3. **دراسة D'Amore وآخرين (D'Amore et al., 2013)**

تناولت هذه الدراسة تحليل أداء الخوارزميات المستخدمة في حساب معاملات متسلسلات تايلور كما هي مطبّقة في الحزمة البرمجية TADIFF المعتمدة على أسلوب الاشتقاق الآلي (Automatic Differentiation). ركّز الباحثون على دراسة التعقيد الحسابي والزمني لحساب عدد كبير من معاملات تايلور، إلى جانب تحليل انتشار أخطاء التقريب العشري أثناء التنفيذ. وأظهرت النتائج أن تنظيم الحساب وفق ما يُعرف بـ «حساب تايلور (Taylor arithmetic) » يمكن أن يوفّر طريقة فعّالة لحساب معاملات المتسلسلات بدقة عالية. وتدعم هذه الدراسة

أهمية الجانب الخوارزمي في حساب حدود متسلسلات تايلور، وهو ما يتكامل مع اهتمام هذه الورقة بتقدير الخطأ المرتبط بهذه الحدود على المستوى النظري والعددي.

4. **دراسة Bakas (Bakas, 2024)**

تبحث هذه الدراسة في استخدام كثيرات حدود تايلور المحسوبة بدقة حسابية عالية (High Arithmetic Precision) بوصفها مقرِّبات شاملة (Universal Approximators) لمجموعة واسعة من المسائل العددية. وقد أوضح المؤلف أنّه عند رفع دقّة التمثيل العددي للمعاملات والقيم، يمكن لكثيرات حدود تايلور أن تقوم بأدوار متعددة، مثل الاستيفاء، والتنبؤ، والتفاضل، والتكامل، وحل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، بل والمساعدة في تعرّف النظم. كما ناقشت الدراسة ظواهر معروفة مثل ظاهرة رونغه (Runge phenomenon)، مبيّنة أن كثيرًا من صعوبات التقريب تعود إلى محدودية دقة الأعداد العائمة أكثر من كونها عيبًا جوهريًا في منهج تايلور نفسه. وتؤكد هذه النتائج الدور المحوري لكثيرات حدود تايلور في التقريب مع ضرورة فهم سلوك الخطأ وحدوده، وهو ما تركز عليه هذه الورقة بالنسبة لبعض الدوال الأساسية وفي إطار دقة عددية تقليدية.

5. **دراسة Chen (Chen, 2015)**

اقترحت هذه الدراسة طريقة تعتمد على متسلسلات تايلور من رتب عليا للحساب الكفء للدوال الابتدائية (مثل الدالة الأسية والدوال المثلثية واللوغاريتمية) في التطبيقات الحاسوبية. اعتمدت المنهجية على تقسيم المجال إلى أجزاء فرعية وتقريب كل جزء بكثير حدود تايلور مناسب، مع الاستفادة من جداول بحث للمعاملات بهدف تقليل العبء التخزيني والحسابي. وركّزت الدراسة على تحليل الخطأ الناتج عن هذه التقريبات وضبطه بما يحقق مستوى الدقة المطلوب في العتاد الحاسوبي. وتبرز هذه النتائج الإمكانات العملية الكبيرة لتوسعات تايلور في حساب الدوال الأساسية بكفاءة، وهو ما يتوافق مع هدف هذه الورقة في دراسة دقة تقريب عدد من هذه الدوال وتحليل حدود الخطأ المرتبطة بها على مجالات محددة.

1. منهجية الدراسة ونطاقها

تعتمد الدراسة على شق تحليلي يتضمن صياغة المتسلسلات، ومناقشة التقارب، وتقدير الخطأ باستخدام الباقي، وشق عددي مبسّط لتوثيق السلوك التقريبي عبر جداول قيم مختارة ورسوم محدودة. وتنحصر الدراسة في دوال أساسية محددة ومجالات قريبة من نقطة التوسع، مع مراعاة قيود الدوال ذات مجال تعريف محدود مثل $\ln(1+x)$، ودون التوسع إلى مقارنات واسعة مع طرائق تقريب أخرى.

2. بناء التقريبات للدوال المختارة

يهدف هذا القسم إلى تثبيت عناصر بناء التقريب بمتسلسلات تايلور للدوال المختارة، وذلك عبر تحديد نقطة التوسع، واختيار مجموعة دوال تمثيلية، وتعيين مجالات الدراسة، ثم صياغة كثيرات الحدود الجزئية $T_n(x)$ التي ستُستخدم لاحقًا في تحليل التقارب وتقدير حدود الخطأ. ويُراعى أن تكون هذه الاختيارات متسقة مع متطلبات الضبط النظري للباقي ومع قابلية التحقق العددي عبر قيم ممثلة داخل المجالات المحددة.

4.1 نقطة التوسع وصياغة كثيرات الحدود الجزئية

تعتمد الدراسة نقطة توسع ثابتة هي $a=0$، ومن ثم تُستخدم متسلسلات ماكلورين بوصفها الحالة الخاصة من متسلسلة تايلور. وعليه تُعرَّف كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة n للدالة f بالصيغة:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k.$$

ويمثـل $T_n(x)$ تقريبـا محليـا للـدالـة قرب الصـــفر، بينمـا يُقـاس أثر القطع عنـد الرتبـة nعبر البـاقي $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ الـذي سـيُعـالـج لاحـقًـا ضـمـن تـحـلـيـل الـخـطـأ (Apostol, 1967).

4.2 اختيار الدوال المدروسة ومبررات الاختيار

تُختار الدوال بحيث تمثل أنماطًا مختلفة من سلوك متسلسلات تايلور من حيث نطاق التقارب، وفي الوقت نفسه تظل من الدوال الأساسية الأكثر حضورًا في التحليل والتطبيقات. بناءً على ذلك تعتمد الدراسة الدوال الآتية:

1. $f_1(x) = e^x$
2. $f_2(x) = \sin\, x$
3. $f_3(x) = \cos\, x$
4. $f_4(x) = \ln\,(1 + x)$

تمثل الدوال e^x، $\sin x$، $\cos x$نموذجًا لمتسـلسـلات قوى ذات تقارب على جميع الأعداد الحقيقية، في حين تمثل $\ln\,(1+x)$ نموذجًا لمتسلسلة ذات نصف قطر تقارب محدود يعتمد على قرب المجال من النقطة $x = -1$ حيث تقع مفردة الدالة عند التوسـع حول الصـفر (لزيداني وأبوشـحمة، 2019)، يتيح هذا التباين إجراء مقارنة ذات معنى بين سرعة التقارب وحدود الخطأ ضمن مجالات محددة.

4.3 تعيين مجالات الدراسة

تُحدد المجالات بما يحقق شرطين: (1) الانتماء إلى نطاق التقارب المناسب لمتسلسلة ماكلورين، و(2) إمكانية اشتقاق حدود خطأ موحدة على المجال عبر التحكم في قيم المشتقات العليا.

- للدوال e^x، $\sin x$، $\cos x$يُعتمد المجال:

$$D_1 = [-1, 1].$$

وهو مجال متناظر حول نقطة التوسع، ويُعد مناسبًا لإظهار أثر زيادة الرتبة nعلى دقة التقريب على مجال كامل دون استدعاء قيم بعيدة عن الصفر.

- للدالة $\ln\,(1+x)$ يُعتمد المجال:

$$D_2 = [-0.75, 0.75].$$

ويُختار هذا المجال داخل نطاق $|x| < 1$ لضـمان اتسـاق المتسـلسـلة مع منطقة التقارب، إضـافة إلى تجنب الاقتراب الشديد من $x = -1$ حيث تتأثر تقديرات الباقي سلبًا بسبب سلوك المشتقات العليا (توري، 1989).

4.4 صياغة متسلسلات ماكلورين للدوال المختارة

تُبنى متسلسلات ماكلورين للدوال المدروسة على النحو الآتي:

4.4.1 الدالة الأسية e^x

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, T_n^{(e)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

(Apostol, 1967)

4.4.2 الدالة $\sin x$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad T_n^{(\sin)}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(Apostol, 1967)

4.4.3 الدالة $\cos x$

$$\cos\ x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, T_n^{(\sin\ \ )}(x) = \sum_{\substack{k\geq 0 \\ 2k\leq n}} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

(Apostol, 1967)

4.4.4 الدالة $\ln\,(1+x)$

لـ $|\,x\,| < 1$:

$$\ln\,(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, T_n^{(in)}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

(Rudin, 1976)

4.5 رتب القطع المعتمدة وآلية المقارنة

لتوحيد المقارنة بين الدوال مع الحفاظ على عدد محدود من الحالات، تعتمد الدراســـة مجموعة رتب قطع محددة، بحيث تُظهر الأثر التدريجي لزيادة n على الدقة:

- للدوال e^x، $\sin x$، $\ln\,(1+x)$:

$$\mathcal{N} = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

- وللدالة $\cos x$تُستخدم الرتب الزوجية المقابلة:

$$\mathcal{N}_{\cos} = \{0, 2, 4, 6, 8\},$$

وذلك لأن حدود متسلسلتها غير الصفرية تقع عند أسس زوجية فقط، مما يضمن مقارنة متسقة من حيث عدد الحدود الفعلية الداخلة في التقريب.

4.6 نقاط التقييم المستخدمة في التحقق العددي

يُعتمد عدد محدود من نقاط التقييم داخل كل مجال، ويُحسب عندها $f(x)$ و$T_n(x)$ والخطأ:

$$E_n(x) = |\, f(x) - T_n(x)\, |.$$

- على المجال $D_1 = [-1,1]$:

$$x \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}.$$

- على المجال $D_2 = [-0.75,0.75]$:

$$x \in \{-0.75, -0.5, 0, 0.5, 0.75\}.$$

وتُستخدم القيم الناتجة لاحقًا لمقارنة سلوك الخطأ الفعلي بحدود الخطأ النظرية المستنتجة من صيغة الباقي ضمن تحليل الخطأ على المجالات المحددة.

3. تحليل التقارب نظريًا

يتناول هذا القسم تقارب كثيرات الحدود الجزئية $T_n(x)$ (المعرّفة في القسم (5)) نحو الدوال الأصلية على المجالات المحددة D_1 و D_2. ويُركّز هنا على إثبات تحقق التقارب النقطي على تلك المجالات، مع بيان تحقق التقارب المنتظم حيثما أمكن، وذلك اعتمادًا على خصائص متسلسلات القوى واختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم على المجالات المغلقة داخل مجال التقارب.

5.1 إطار التحليل وأهدافه

لكل دالة f من الدوال المختارة في القسم (5)، تُعرَّف متتالية التقريبات $\{T_n\}$ بوصفها مجاميع جزئية لمتسلسلة ماكلورين المرتبطة بـf. وعليه يتم بحث المسألتين الآتيتين على المجالات المعتمدة:

1. **التقارب النقطي:** التحقق من أن $T_n(x) \to f(x)$ لكل x في المجال المعني.
2. **التقارب المنتظم:** التحقق من أن $\sup_{x\in D} | T_n(x) - f(x) | \to 0$ على المجال D عندما يكون ذلك ممكنًا، لأن هذا النمط يضمن تحكمًا موحدًا في الخطأ على المجال (Bartle & Sherbert, 2011).

5.2 تقارب متسلسلات e^x، $\sin x$، $\cos x$ على $D_1 = [-1, 1]$

تُعد متسلسلات ماكلورين للدوال e^x، $\sin x$، $\cos x$ متسلسلات قوى ذات نصف قطر تقارب لا نهائي؛ أي إنها تتقارب (مطلقًا) لكل $x \in \mathbb{R}$(Apostol, 1967). ولغرض الدراســــة يكفي إثبات التقارب المنتظم على المجال المغلق $D_1 = [-1,1]$.

5.2.1 الدالة الأسية e^x

لـ $x \in [-1,1]$يكون:

$$\left| \frac{x^k}{k!} \right| \le \frac{1}{k!}.$$

وبما أن $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$متسلسلة متقاربة، فإن اختبار فايرشتراس يضمن أن متسلسلة $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ تتقارب **تقاربًا منتظمًا** على D_1 (Bartle & Sherbert, 2011). ومن ثم فإن المجاميع الجزئية

$$T_n^{(e)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

تتقارب إلى e^xتقاربًا منتظمًا على D_1، وبالأخص تقاربًا نقطيًا لكل $x \in D_1$.

5.2.2 الدالة $\sin x$

لمجاميع $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$، ولـ $x \in [-1,1]$نحصل على:

$$\left| \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \le \frac{1}{(2k+1)!}.$$

وبما أن $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}$ متقاربة، فإن المتسلسلة تتقارب تقاربًا منتظمًا على D_1 باختبار فايرشتراس (Rudin, 1976). وبالتالي:

$$T_n^{(\sin\ )}(x) \to \sin x \text{ على بانتظام } D_1.$$

5.2.3 الدالة $\cos x$

وبالمثل لمتسلسلة $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$، ولـ $x \in [-1,1]$:

$$\left|\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \le \frac{1}{(2k)!}.$$

ومع تقارب $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}$، نستنتج أن متسلسلة $\cos x$ تتقارب **تقاربًا منتظمًا** على D_1، ومن ثم:

$$T_n^{(\cos\ )}(x) \to \cos x \text{ على بانتظام } D_1$$

(بارتل، 1981؛ جهيمة، 2006).

خلاصة 5.2: تتحقق لكل من e^x، $\sin x$، $\cos x$ على D_1 نتيجتان أساسيتان:

- $T_n(x) \to f(x)$ **نقطيًا** لكل $x \in D_1$.
- $T_n(x) \to f(x)$ **بانتظام** على D_1، وهو ما يوفر أساسًا نظريًا للضبط الموحد للخطأ على المجال.

5.3 تقارب متسلسلة $\ln(1+x)$ على $D_2 = [-0.75, 0.75]$

تُعطى متسلسلة ماكلورين للدالة $\ln(1+x)$ بـ:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}, \text{ لـ } |x| < 1$$

(Rudin, 1976). وبما أن المجال المختار $D_2 = [-0.75,0.75]$ يقع داخل $|x| < 1$، فإن تقارب المتسلسلة عليه يمكن ضبطه على نحو منتظم.

لـ $x \in D_2$ ضع $r = 0.75$، فنحصل على:

$$\left|\frac{x^k}{k}\right| \le \frac{r^k}{k} \le r^k.$$

وبما أن المتسلسلة الهندسية $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ متقاربة عندما $0 < r < 1$، فإن اختبار فايرشتراس يعطي أن متسلسلة $\ln(1+x)$ تتقارب **تقاربًا منتظمًا** على D_2 (Bartle & Sherbert, 2011). وعليه:

$$T_n^{(\ln\ )}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \longrightarrow \ln(1+x) \text{ على بانتظام } D_2.$$

ومن المهم التنبيه إلى أن تقييد المجال داخل $|x| < 1$ ليس إجراءً شكليًا، بل يعكس الطبيعة التحليلية للمتسلسلة: فهي لا تتقارب عند $x = -1$ (حيث تصبح سلسلة توافقية غير متقاربة)، بينما تتقارب عند $x = 1$ إلى $\ln 2$ وفق تقارب

متسلسلة متناوبة (Rudin, 1976). ولذلك تم اعتماد D_2 داخل دائرة التقارب لضمان اتساق التحليل النظري مع التطبيق اللاحق.

5.4 نتائج التقارب المعتمدة في الدراسة

استنادًا إلى ما سبق، تعتمد الدراسة النتائج الآتية بوصفها أساسًا للأقسام اللاحقة:

1. على $D_1 = [-1,1]$:

$T_n^{(e)}(x) \to e^x, T_n^{(\sin\ )}(x) \to \sin\ x, T_n^{(cos)}(x) \to \cos\ x$بانتظام.

2. على $D_2 = [-0.75,0.75]$:

$T_n^{(in)}(x) \to \ln\ (1+x)$بانتظام

وتُستخدم هذه النتائج لاحقًا لتبرير دراسة الخطأ على المجالات بصياغات موحّدة، ولربط السلوك النظري للتقارب بالمشاهدات العددية ضمن نقاط التقييم المعتمدة.

6. تحليل الخطأ وحدوده

يركّز هذا القسم على توصيف الخطأ الناتج عن قطع متسلسلة ماكلورين عند رتبة محددة n، وبناء حدود علوية له على المجالات المعتمدة D_1 و D_2. ويُعرّف الخطأ عند النقطة x بالفرق

$$E_n(x) = |\ f(x) - T_n(x)\ | = |\ R_n(x)\ |,$$

حيث $R_n(x)$ هو باقي تايلور. تُشـتق الحدود العلوية اعتمادًا على صـيغة لاغرانج للباقي، ثم تُحوّل إلى حدود صالحة على المجال عبر تقدير عظمى المشتقة $(n+1)$على المجال المدروس.

6.1 الصيغة العامة لحدّ الخطأ على مجال

إذا كانت f قابلة للاشتقاق حتى الرتبة $n+1$ على فترة تحتوي 0 وx، فإن صيغة لاغرانج للباقي تعطي وجود cبين 0و x بحيث

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\ x^{\,n+1}.$$

ومن ثم لأي مجال مغلق D يحتوي الصفر، وإذا وُجد ثابت $M_{n+1}(D)$ يحقق

$$|\ f^{(n+1)}(t)\ | \le M_{n+1}(D) \forall\ t \in D,$$

فإنه لكل $x \in D$:

$$|\ R_n(x)\ | \le \frac{M_{n+1}(D)}{(n+1)!}\ |\ x\ |^{n+1} \le \frac{M_{n+1}(D)}{(n+1)!}\ \rho^{\,n+1}, \rho = \max_{x\in D}\ |\ x\ |.$$

تُستخدم هذه المتباينة لاحقًا على D_1و D_2 لتقديم حدود خطأ موحّدة قابلة للمقارنة بين الدوال.

6.2 حدود الخطأ للدالة الأسية e^xعلى $D_1 = [-1, 1]$

لدالة $f(x) = e^x$ لدينا $f^{(n+1)}(x) = e^x$. على المجال D_1 يتحقق:

$$\max_{t\in[-1,1]} e^t = e.$$

وبتطبيق صيغة الباقي:

$$| R_n^{(e)}(x) | \leq \frac{e}{(n+1)!} \ | x |^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}, x \in [-1,1].$$

يوفّر هذا الحد تقديرًا موحّدًا للخطأ على المجال، ويتناقص سريعًا مع زيادة nبسبب وجود العامل $(n+1)!$ في المقام.

6.3 حدود الخطأ للدالتين $\sin x$و$\cos x$ على $D_1 = [-1, 1]$

6.3.1 الدالة $\sin x$

مشتقات $\sin x$ تتناوب بين $\pm\sin x$ و $\pm\cos x$، ولذلك:

$$| f^{(n+1)}(t) | \leq 1 \forall t \in \mathbb{R}.$$

ومن ثم على D_1:

$$| R_n^{(\sin)}(x) | \leq \frac{1}{(n+1)!} \ | x |^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}, x \in [-1,1].$$

6.3.2 الدالة $\cos x$

وبالطريقة نفسها لأن مشتقات $\cos x$ تتناوب بين $\pm\cos x$ و $\pm\sin x$، فإن:

$$| f^{(n+1)}(t) | \leq 1 \forall t \in \mathbb{R},$$

وبالتالي على D_1:

$$| R_n^{(\cos)}(x) | \leq \frac{1}{(n+1)!} \ | x |^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}, x \in [-1,1].$$

ملاحظة تطبيقية: عند اختيار رتب قطع توافق طبيعة المتسلسلة (فردية لـــ sin وزوجية لـــ cos)، فإن حد الباقي يظل يأخذ الشكل العام أعلاه مع nمساويًا لدرجة كثيرة الحدود المعتمدة في القسم (5).

6.4 حدود الخطأ للدالة $\ln(1+x)$ على $D_2 = [-0.75, 0.75]$

للدالة $f(x) = \ln(1+x)$ تكون المشتقات من الرتبة $m \geq 1$:

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m}.$$

وعليه:

$$| f^{(n+1)}(x) | = \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

على المجال $D_2 = [-0.75,0.75]$ أصغر قيمة لـ$x + 1$ هي $1 - 0.75 = 0.25$، ومن ثم:

$$| f^{(n+1)}(x) | \leq \frac{n!}{(0.25)^{n+1}} = n! \ 4^{n+1}.$$

وبتطبيق صيغة الباقي:

$$|\ R_n^{(in)}(x)\ | \leq \frac{n!\ 4^{n+1}}{(n+1)!}\ |\ x\ |^{n+1} = \frac{4^{n+1}}{n+1}\ |\ x\ |^{n+1}.$$

وبما أن $|\ x\ | \leq 0.75$ على D_2، ينتج حد موحّد:

$$|\ R_n^{(in)}(x)\ | \leq \frac{4^{n+1}}{n+1}\ (0.75)^{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+1}, x \in [-0.75,0.75].$$

تفسير الحد: هذا الحد موحّد على المجال لكنه محافظ؛ إذ يعتمد على تقدير علوي للمشتقات عند أقرب نقطة إلى -1 داخل المجال. ورغم أنه يضـمن الضـبط، فقد يكون أكبر من الخطأ الفعلي خاصـةً للقيم القريبة من الصـفر. وتُظهر المقارنة العددية لاحقًا الفجوة المتوقعة بين الحد النظري والخطأ المحسوب.

6.5 حدود موحّدة مقارنة حسب الدالة والمجال

تلخص الحدود الموحدة السابقة على المجالات المعتمدة كما يأتي:

- على $D_1 = [-1,1]$:

$$|\ R_n^{(e)}(x)\ | \leq \frac{e}{(n+1)!}, |\ R_n^{(\sin)}(x)\ | \leq \frac{1}{(n+1)!}, |\ R_n^{(\cos)}(x)\ | \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

- على $D_2 = [-0.75,0.75]$:

$$|\ R_n^{(in)}(x)\ | \leq \frac{3^{n+1}}{n+1}.$$

وتُسـتخدم هذه الحدود في القسـم اللاحق لمقارنة مقدار الضـمان النظري مع القيم العددية للخطأ عند نقاط التقييم المعتمدة.

7. النتائج والتحقق العددي والمناقشة

يعرض هذا القســم نتائج التحقق العددي لتقريبات ماكلورين $T_n(x)$ للدوال المختارة على المجالات المعتمدة في القسم (5)، مع قياس دقة التقريب عبر الخطأ

$$E_n(x) = |\ f(x) - T_n(x)\ |.$$

ولأغراض المقارنة ضمن إطار نقاط التقييم، يُستخدم أيضًا المؤشر

$$E_{n,\max} = \max_{x \in \mathcal{X}} E_n(x),$$

حيث $\mathcal{X}$ مجموعة نقاط التقييم لكل مجال. كذلك تُقارن القيم العددية للخطأ بالحدود العلوية الموحَّدة B_n المستنتجة في القسم (7) لكل دالة وعلى مجالها.

7.1 إعدادات التحقق العددي ومؤشرات العرض

تم اعتماد نقاط التقييم والرتب وفق ما يأتي:

- على $D_1 = [-1,1]$ للدوال e^x، $\sin x$، $\cos x$:

$$\mathcal{X}_1 = \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}.$$

- على $D_2 = [-0.75,0.75]$ للدالة $\ln(1+x)$:

$$\mathcal{X}_2 = \{-0.75, -0.5, 0, 0.5, 0.75\}.$$

اعتمدت الرتب $\mathcal{N} = \{1,3,5,7,9\}$ للدوال e^x، $\sin x$، $\ln(1+x)$، واعتمدت الرتب الزوجية $\mathcal{N}_{\cos} = \{0,2,4,6,8\}$ للدالة $\cos x$ اتساقًا مع حدود متسلسلتها.

7.2 نتائج الدالة الأسية e^x على $D_1 = [-1, 1]$

يبيّن جدول (1) أن الخطأ يتناقص بسرعة مع زيادة الرتبة n، وأن $E_{n,\max}$ ضمن نقاط التقييم يتحقق عند $x = 1$. كما تُظهر المقارنة أن $E_{n,\max} \le B_n$ لجميع الرتب، بما يتسق مع كون B_n حدًا علويًا موحدًا على المجال.

الجدول (1): قيم الخطأ المطلق والحد العلوي النظري في تقريب الدالة e^x على المجال $[-1,1]$ باستخدام كثيرات حدود ماكلورين من الرتبة n.

B_n	$E_{n,\max}$	x=1	x=0.5	x=0	x=-0.5	x=-1	n
1.359	7.183×10^{-1}	7.183×10^{-1}	1.487×10^{-1}	0	1.065×10^{-1}	3.679×10^{-1}	1
1.133×10^{-1}	5.162×10^{-2}	5.162×10^{-2}	2.888×10^{-3}	0	2.364×10^{-3}	3.455×10^{-2}	3
3.775×10^{-3}	1.615×10^{-3}	1.615×10^{-3}	2.335×10^{-5}	0	2.024×10^{-5}	1.213×10^{-3}	5
6.742×10^{-5}	2.786×10^{-5}	2.786×10^{-5}	1.025×10^{-7}	0	9.176×10^{-8}	2.230×10^{-5}	7
7.491×10^{-7}	3.029×10^{-7}	3.029×10^{-7}	2.819×10^{-10}	0	2.574×10^{-10}	2.525×10^{-7}	9

7.3 نتائج الدالتين $\sin x$ و $\cos x$ على $D_1 = [-1, 1]$

تظهر نتائج $\sin x$ في جدول (2) تناقصًا منتظمًا للخطأ مع زيادة n، مع تمركز $E_{n,\max}$ ضمن نقاط التقييم عند $|x| = 1$. كما يبقى الحدّ العلوي الموحد $B_n = \frac{1}{(n+1)!}$ أعلى من $E_{n,\max}$ عبر جميع الرتب.

الجدول (2): قيم الخطأ المطلق والحد العلوي النظري في تقريب الدالة $\sin x$ على المجال $[-1,1]$ باستخدام كثيرات حدود ماكلورين من الرتب الفردية n.

B_n	$E_{n,\max}$	**x=1**	**x=0.5**	**x=0**	**x=-0.5**	**x=-1**	**n**
1.359	7.183×10^{-1}	7.183×10^{-1}	1.487×10^{-1}	0	1.065×10^{-1}	3.679×10^{-1}	1
1.133×10^{-1}	5.162×10^{-2}	5.162×10^{-2}	2.888×10^{-3}	0	2.364×10^{-3}	3.455×10^{-2}	3
3.775×10^{-3}	1.615×10^{-3}	1.615×10^{-3}	2.335×10^{-5}	0	2.024×10^{-5}	1.213×10^{-3}	5
6.742×10^{-5}	2.786×10^{-5}	2.786×10^{-5}	1.025×10^{-7}	0	9.176×10^{-8}	2.230×10^{-5}	7
7.491×10^{-7}	3.029×10^{-7}	3.029×10^{-7}	2.819×10^{-10}	0	2.574×10^{-10}	2.525×10^{-7}	9

أما بالنسبة إلى $\cos x$ فقد استُخدمت الرتب الزوجية {0، 2، 4، 6، 8}. يوضح جدول (3) نمطًا مماثلًا: انخفاض منتظم للخطأ مع زيادة الرتبة، مع بقاء الحد العلوي B_n أعلى من $E_{n,\max}$.

الجدول (3): قيم الخطأ المطلق والحد العلوي النظري في تقريب الدالة $\cos x$ على المجال $[-1,1]$ باستخدام كثيرات حدود ماكلورين من الرتب الزوجية n.

B_n	$E_{n,\max}$	x=1	x=0.5	x=0	x=-0.5	x=-1	n
1	4.597×10^{-1}	4.597×10^{-1}	1.224×10^{-1}	0	1.224×10^{-1}	4.597×10^{-1}	0
1.667×10^{-1}	4.030×10^{-2}	4.030×10^{-2}	2.583×10^{-3}	0	2.583×10^{-3}	4.030×10^{-2}	2
8.333×10^{-3}	1.364×10^{-3}	1.364×10^{-3}	2.160×10^{-5}	0	2.160×10^{-5}	1.364×10^{-3}	4
1.984×10^{-4}	2.453×10^{-5}	2.453×10^{-5}	9.661×10^{-8}	0	9.661×10^{-8}	2.453×10^{-5}	6
2.756×10^{-6}	2.735×10^{-7}	2.735×10^{-7}	2.686×10^{-10}	0	2.686×10^{-10}	2.735×10^{-7}	8

7.4 نتائج الدالة $\ln(1+x)$ على $D_2 = [-0.75, 0.75]$

يبين جدول (4) تناقص الخطأ مع زيادة الرتبة على نقاط التقييم، مع ظهور عدم تماثل بين الجهتين السالبة والموجبة؛ إذ تكون الأخطاء عند $x = -0.75$ أكبر من الأخطاء عند $x = 0.75$ للرتبة نفسها. كما يظهر أن الحدّ العلوي الموحد $B_n = \frac{3^{n+1}}{n+1}$ (المستنتج في القسم 6.4) محافظ على نحو واضح؛ فهو يضمن الضبط على المجال لكنه لا يمثل مقدار الخطأ الفعلي ضمن نقاط التقييم.

الجدول (4): قيم الخطأ المطلق والحد العلوي النظري في تقريب الدالة $\ln(1+x)$ على المجال $[-0.75,0.75]$ باستخدام كثيرات حدود ماكلورين من الرتبة n.

B_n	$E_{n,\max}$	x=1	x=0.5	x=0	x=-0.5	x=-1	n
5×10^{-1}	1.585×10^{-1}	1.585×10^{-1}	2.057×10^{-2}	0	2.057×10^{-2}	1.585×10^{-1}	1
4.167×10^{-2}	8.138×10^{-3}	8.138×10^{-3}	2.589×10^{-4}	0	2.589×10^{-4}	8.138×10^{-3}	3
1.389×10^{-3}	1.957×10^{-4}	1.957×10^{-4}	1.545×10^{-6}	0	1.545×10^{-6}	1.957×10^{-4}	5
2.480×10^{-5}	2.731×10^{-6}	2.731×10^{-6}	5.370×10^{-9}	0	5.370×10^{-9}	2.731×10^{-6}	7
2.756×10^{-7}	2.489×10^{-8}	2.489×10^{-8}	1.221×10^{-11}	0	1.221×10^{-11}	2.489×10^{-8}	9

ولإسناد تفسير سلوك الخطأ على D_2 يمكن استخدام حدود تعتمد على طبيعة السلسلة نفسها. فعندما $x \in (0,1)$ تكون المتسلسلة متناوبة وحدودها تتناقص إلى الصفر، ومن ثم يقدَّر الخطأ بحد الحد التالي:

$$E_n(x) \le \frac{x^{n+1}}{n+1}\,(0 < x < 1),$$

وعندما $x \in (-1,0)$ يمكن تقدير ذيل السلسلة تقديرًا علويًا عبر:

$$E_n(x) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)}\,(|x| < 1)$$

. .(Rudin, 1976)

7.5 مناقشة سرعة التقارب وسلوك الخطأ

1. **اعتماد الخطأ على $|x|$ داخل المجال:** تُظهر النتائج أن $E_n(0) = 0$ لجميع الدوال، وأن الخطأ يزداد نسبيًا عند نقاط $|x|$ الأكبر ضمن المجال، وهو سلوك يتسق مع اعتماد بواقي تايلور على قوى من رتبة $n+1$ في $|x|$.
2. **الدوال e^x، $\sin x$، $\cos x$ على D_1:** تتميز هذه الدوال بتناقص سريع للخطأ مع زيادة الرتبة، ويظهر توافق واضح بين القيم العددية وحدود الخطأ الموحدة المشتقة في القسم (6) من حيث بقاء الخطأ دون الحد العلوي على المجال.
3. **الدالة $\ln(1+x)$ على D_2:** يتناقص الخطأ عددياً مع زيادة n ضمن نقاط التقييم، إلا أن الحدّ الموحد B_n المستنتج عبر تعظيم مشتقة الرتبة $(n+1)$ على المجال يتصف بالمحافظة.

8. الخاتمة

درست هذه الدراسة تقريب قيم عدد من الدوال الأساسية باستخدام متسلسلات تايلور (ماكلورين حول $a = 0$، مع الجمع بين تحليل التقارب على مجالات محددة وبناء حدود علوية لخطأ القطع عند رتبة n. وقد تم اختيار الدوال e^x، $\sin x$، $\cos x$ على المجال $D_1 = [-1,1]$، والدالة $\ln(1+x)$ على المجال $D_2 = [-0.75,0.75]$ بما يضمن اتساق مجال التعريف ونطاق التقارب مع أهداف التحليل.

أظهر التحليل النظري تحقق التقارب المنتظم لمجاميع ماكلورين الجزئية $T_n(x)$ نحو الدوال الأصـــــلية على المجالات المعتمدة، الأمر الذي يوفّر أســاسًــا رياضــيًا للتحكم الموحد في الخطأ على المجال. كما أتاح اســتعمال صــيغة لاغرانج للباقي اشـــتقاق حدود علوية للخطأ من الصـــورة $|R_n(x)| \leq B_n$. وقد اتســـمت الحدود الموحدة للدوال e^x، $\sin x$، $\cos x$ على D_1بفاعلية واضحة من حيث التناقص السريع مع زيادة nنتيجة ظهور العامل $(n+1)!$ في المقام، وهو ما انعكس في نتائج التحقق العددي بانخفاض سـريع للأخطاء حتى عند رتب قطع متوسـطة. في المقابل، بيّنت حالة $\ln(1+x)$ على D_2 أن الحد الموحد المســـتنتج عبر تعظيم المشـــتقة من الرتبة $(n+1)$ على المجال يكون محافظًا بدرجة كبيرة، لأن تقدير المشـــتقات يتأثر بالطرف الســـالب للمجال القريب نســـبيًا من نقطة التفرد $x = -1$. وقد دعمت النتائج العددية هذا الاستنتاج بإظهار فجوة ملموسة بين الحد الموحد وقيم الخطأ الفعلية، بينما قدمت حدود تعتمد على بنية السلسلة (على الجزء الموجب المتناوب وتقدير ذيل السلسلة على الجزء السالب) ضبطًا علويًا أقرب لسلوك الخطأ عند نقاط التقييم.

تؤكد الدراسـة أن تقريب تايلور فعّال على مجالات قريبة من نقطة التوسع عندما تكون المشتقات العليا مضـبوطة على المجال، وأن اختيار المجال ونوع حد الخطأ عاملان حاســـمان في تقييم موثوقية التقريب. وتتمثل اتجاهات التطوير اللاحقة في مقارنة تايلور بطرائق تقريب بديلة (مثل بادِيه أو تشـيبيشـيف)، ودراسـة أثر تغيير نقطة التوسـع aعلى سـرعة التقارب وحدود الخطأ، وبناء حدود أكثر إحكامًا للدالة اللوغاريتمية باستخدام صيغ بديلة للباقي أو تقديرات محلية للمشتقات.

9. المراجع

أولًا: المراجع العربية

1. الشـقماني، زينب علي؛ رفيدة، سـمية رجب. (2016). الطرق العددية لحل منظومة من المعادلات التفاضـلية. المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، 2(6)، 408–430.
2. أبو شـــحمة، حنان صـــالح؛ الزيداني، منال الطاهر. (2019). تقريب الدوال بكثيرات الحدود. المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، 5(12)، 192–200.
3. الشـويرف، مريم فرج أحمد. (2025). تقريب الدوال باسـتخدام كثيرات الحدود. رسـالة ماجسـتير غير منشـورة، قسـم الرياضيات، كلية العلوم، الجامعة الأسمرية الإسلامية، ليبيا.
4. علاب، قادة؛ سعد الله، أبو بكر خالد. (2010). عناصر من التحليل الرياضـي: التوابع لمتغير حقيقي واحد – المرحلة الجامعية الأولى. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
5. بارتل، روبرت ج. (1981). العناصـــر لتحليل حقيقي (ترجمة محمد علي الســـمري؛ مراجعة فؤاد محمد رجب). نيويورك: جون وايلي وأولاده.
6. توري، رشيد؛ مقران، عبد الحفيظ. (1990). مدخل إلى التحليل الرياضـي. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
7. جهيمة، رمضان محمد. (2006). التحليل الحقيقي. القاهرة: الدار الدولية للنشر والتوزيع.

ثانيًا: المراجع الأجنبية

8. Almajbri, T. F. A., Mohammed, A. B., & Abu-amr, S. S. M. (2024). Review of the Numerical Analysis of the Quadratic Riccati Equation using Adomian Decomposition Methods and Taylor Expansion. International Science and Technology Journal, 34(2), 1–11. https://doi.org/10.62341/tasr7623
9. D’Amore, L., Mele, V., & Murli, A. (2013). Performance Analysis of the Taylor Expansion Coefficients Computation as Implemented by the Software Package TADIFF. Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics, 8(1–4), 1–12.

10. Bakas, N. (2024). Taylor Polynomials in a High Arithmetic Precision as Universal Approximators. Computation, 12(3), 53. https://doi.org/10.3390/computation12030053
11. Chen, C. (2015). High-order Taylor Series Approximation for Efficient Computation of Elementary Functions. IET Computers & Digital Techniques, 9(6), 328–335. https://doi.org/10.1049/iet-cdt.2014.0158
12. Apostol, T. M. (1967). Calculus, Volume 1: One-variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra (2nd ed.). John Wiley & Sons.
13. Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). Introduction to Real Analysis (4th ed.). Wiley.
14. Burden, R. L., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2016). Numerical Analysis (10th ed.). Cengage Learning.
15. Rudin, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis (3rd ed.). McGraw-Hill.