Comprehensive Journal of Science
Volume (10), Issue (38), (Dec, 2025)
ISSN: 3014-6266

مجلة العلوم الشاملة
المجلد (10) ملحق العدد 38 ديسمبر 2025
ردمد: 3014-6266

بعض التطبيقات المتقدمة للمعادلات التفاضلية الجزئية في الفيزياء الحديثة: من الأنظمة الكلاسيكية الى الحديثة.

بثينة ابوالقاسم امحمد الذيب
Buthuynah Aboulqasim Amhimmid Aldeeb
جامعة الزاوية/ كلية التربية ناصر/ قسم الرياضيات
التخصص فيزياء– مدينة الزاوية– دولة ليبيا
buth.aldeeb@zu.edu.ly

تاريخ الاستلام:2025/11/12 –تاريخ المراجعة: 2025/12/2– تاريخ القبول: 2025/12/27– تاريخ للنشر :2/5/ 2026

المخلص

نقدم في هذه الورقة البحثية دراسة عن بعض التطبيقات المتقدمة للمعادلات التفاضلية الجزئية في الفيزياء الحديثة حيث خلاصة هذا البحث ان المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) تمثل حجر الأساس للأنظمة الفيزيائية عبر مقاييس متعددة وتستكشف بعض التطبيقات المتقدمة للمعادلات التفاضلية الجزئية في نظرية الحقل الكلاسيكي، والميكانيكا الكمومية، والفيزياء النسبية. نحن نحلل معادلة الحرارة كنموذج اولي لعمليات الانتشار، ومعادلة الموجة للإشعاع الكهرومغناطيسي، ومعادلة شرودنجر للديناميكا الكمومية. تشمل المساهمات الجديدة تحليلا مقارناً للطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية ومناقشة لتطبيقاتها في التقنيات الناشئة.

تسلط النتائج الضوء على القوة التنبؤ للنماذج القائمة على المعادلات التفاضلية الجزئية ودورها الحاسم في الفيزياء النظرية والتطبيقية.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الجزئية، معادلة الحرارة، معادلة الموجة والكهرومغناطيسية، معادلة شرود نجر، الطرق العددية..

Abstract

This research paper presents a study of some advanced application of partial differential equations (PDEs) in modeling physics. The conclusion of this research is that PDES are the cornerstone of physical systems across multiple scales, and at explores some advanced applications of PDES in classical field theory, quantum mechanics, and relativistic physics. We analyze the heat equation as a prototype for diffusion processes, the wave equation for electromagnetic radiation, and the Schrodinger equation for quantum dynamics. Novel contributions include a comparative analysis of numerical methods for solving nonlinear PDEs and a discussion of their implications for emerging technologies. The results highlight the predictive power of PDE-based modeling and its critical role in theoretical and applied physics.

Keywords: Partial Differential Equations, Heat Equation, Wave Equations and Electromagnetism, Numerical Methods ,Schrodinger equation.

1. المقدمة البحث:

تعتبر المعادلات التفاضلية الجزئية(PEDs) حجر الزاوية في الفيزياء النظرية، مما يتيح الصياغة الرياضية للظواهر المستمرة. كما يشير[2]:"المعادلات التفاضلية الجزئية هي اللغة التي يتم بها التعبير عن قوانين الطبيعة". من المعادلات ماكسويل الى معادلة شرودنجر، التي تربط المعادلات التفاضلية الجزئية بين المبادئ النظرية والملاحظات التجريبية.

تفحص هذه الورقة التطبيقات الرئيسة للمعادلات التفاضلية الجزئية في الفيزياء، مع التركيز على حلولها التحليلية والعددية. نركز على ثلاثة مجالات:

1- المعادلات التفاضلية الجزئية القطعية للانتشار والديناميكا الحرارية.

2- المعادلات التفاضلية الجزئية الزائدية لانتشار الموجات ونظرية الحقل.

3- المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليلجية والخطية للأنظمة الكمومية.

نناقش أيضا الاتجاهات الناشئة، بما في ذلك المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية والحلول المدعومة بتعلم الألة.

ستهدف هذا البحث النظري دراسة التطبيقات المتقدمة للمعادلات التفاضلية الجزئية (PDF) في الفيزياء الحديثة، رابطاً بين مفاهيم الأنظمة الكلاسيكية (مثل معادلات الموجة والانتشار) والأنظمة الكمومية (مثل معادلة شرودنجر) .

يسعى البحث لفهم كيفية نمذجة الظواهر الفيزيائية المعقدة وحلها، وتحليل نقاط الضعف في النماذج الحالية، وطرح حلول رياضية جديدة تعزز دقة التنبؤات الفيزيائية .

2. **مشكلة البحث** :تكمن في صعوبة إيجاد حلول تحليلية دقيقة للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية التي تصف الأنظمة الفيزيائية الحديثة المعقدة، والغموض في دمج الأطر الكلاسيكية مع الكمومية في نماذج رياضية موحدة.

3. **تساؤلات البحث:**
   1. ما هي أهم المعادلات التفاضلية الجزئية المتقدمة التي تحكم الأنظمة الكلاسيكية والكمومية؟
   2. كيف يتم الانتقال الرياضي من النمذجة الكلاسيكية إلى الكمومية باستخدام هذه المعادلات؟
   3. ما هي الطرق الرياضية الحديثة (التحليلية والتقريبية) لحل المعادلات التفاضلية غير الخطية في الفيزياء الحديثة؟

4. **فرضيات البحث:**
   1. توجد علاقة وثيقة بين دقة نتائج المعادلات التفاضلية الجزئية وطبيعة الحدود الشرطية المستخدمة (الابتدائية والحدودية).
   2. النماذج المتقدمة للمعادلات غير الخطية تعطي فهماً أعمق للأنظمة الفيزيائية الكمومية مقارنة بالنماذج الكلاسيكية التقليدية.

5. **اهداف البحث:**
   1. استعراض ابرز التطبيقات الكلاسكية للمعادلات التفاضلية الجزئية في مجالات الانتشار الحراري و الموجات.
   2. تحليل بنية معادلة شرودنجر كمعادلة تفاضلية جزئية في ميكانيك الكم.

6. **أهمية البحث** :تقديم مراجعة نظرية شاملة لمعادلات انتشار الحرارة، الموجة، و شرودنجر ودورها في التطبيقات الحديثة، مما يسهم في تطوير حلول فيزيائية، ويوفر مرجعاً رياضياً للأنظمة المتقدمة.

7. **مصطلحات البحث** :المعادلات التفاضلية الجزئية(PDEs) ، معادلة انتشار الحرارة، معادلة الموجة و الكهرومغناطيسية، معادلة شرودنجر, تطبيقات متقدمة.

8. **حدود البحث:**

1. **حدود موضوعية** :دراسة نظرية فقط للمعادلات التفاضلية الجزئية وتطبيقاتها في الأنظمة الفيزيائية. (مثل معادلة الموجة, معادلة الانتشار و معادلة شردنجر).
2. **حدود زمانية ومكانية** :مراجعة الأدبيات العلمية المنشورة في هذا المجال في العقدين الأخيرين.

9. تعريف المعادلات التفاضلية الجزئية.

لمعادلات التفاضلية الجزئية ((Partial Differential Equations – PDEsهي نوع من المعادلات الرياضية التي تتضمن مشتقات جزئية لمتغيرات متعددة. وتستخدم لوصف الظواهر التي تتغير عبر المكان والزمان، مثل انتشار الحرارة، حركة الموجات، وتدفق السوائل [1].

تتميز المعادلات التفاضلية الجزئية عن المعادلات التفاضلية العادية بأنها تتعامل مع وظائف تعتمد على أكثر من متغير مستقل، بينما المعادلات التفاضلية العادية تعتمد على متغير واحد فقط. ومن أشهر المعادلات التفاضلية الجزئية في الفيزياء:

1− معادلة انتشار الحرارة: تصف كيفية انتقال الحرارة في المواد.

2− معادلة الموجة: تستخدم في دراسة الحركة الموجية في الأوساط المختلفة.

3− معادلة شرودنجر: تُستخدم في ميكانيكا الكم لوصف سلوك الجسيمات.

10.معادلة انتشار الحرارة:

تعد معادلة الحرارة من ابسط وأشهر المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) وهي معادلة تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية (معادلة تفاضلية جزئية قطعية)، وتصف كيفية تطور كميات مثل درجة الحرارة او التركيز في المكان والزمن، تسمي أيضا بمعادلة الانتشار وذلك لتعبيرها عن انتشار شيء ما في الوسط (تعبر عن تركيز المادة المنتشرة). تم تطويرها لأول مرة بواسطة جوزيف فوريا عام 1822, وهي تستخدم في العديد من التطبيقات الهندسية و الفيزيائية، مثل تصميم أنظمة التبريد و التدفئة وتحليل انتقال الحرارة في المواد المختلفة[9] ،[10]، و في شكلها القياسي، يتم التعبير عنها كالتالي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\,\nabla^2 u \qquad (1)$$

حيث $\boldsymbol{u(x,t}$) درجة الحرارة، $\boldsymbol{\alpha}$ ومعامل الانتشار.

10.1 الاشتقاق الفيزيائي

ينص القانون قانون فوريا للتوصيل الحراري على أن تدفق الحرارة q يتناسب مع التدرج السلبي لدرجة الحرارة:

$$q = -k\nabla u \qquad (2)$$

الجمع بين هذا القانون وحفظ الطاقة يؤدي على معادلة الحرارة [4]:

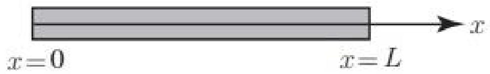
$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla.(k\nabla u) \qquad (3)$$

للقيمة الثابتة لـ k، يتبسط هذا على الشكل القياسي.

ρ كثافة و c_p سعة الحرارة النوعية.

10.2 الحل العام لتطبيق فيزيائي عن معادلة الحرارة:

لنفترض قضيباً أحادي البعد بشروط حدودية $\boldsymbol{u(0,t) = u(L,t) = 0}$ ذي مقطع عرضي منتظم، ومتجانس ومعزولا حراريا من الجوانب أي لا تمر الحرارة من خلاله ، فانه يمكن حل هذه المنظومة الحرارية باستخدام فصل المتغيرات للمعادلة (1) ، يكون حلها كالتالي: ويمكن حل هذه المنظومة الحرارية باستخدام معادلة تفاضلية الجزئية تسمي معادلة التوصيل الحراري ولها الشكل (2)التالي[3]:



الشكل 2

$$u_t = \alpha\, u_{xx} \qquad 0 < x < l\,,\ \ 0 < t < l \qquad \rightarrow\ (4)$$

حيث α^2 هو ثابت معامل انتشار الحراري ويعتمد على نوع المادة التي صنع منها الشريط

$\alpha^2 = \frac{k}{Ps}$ حيث kهو معامل التوصيل، و sهي الحرارة النوعية، وP هي الكثافة.

ولحل هذه المعالة نفرض ان الاتي:

$$u(x,t) = X(x) * T(t) \quad \rightarrow \quad (5)$$

نقوم باشتقاق المعادلة (3) بالنسبة ل$X^{=}$, T نجد ان :

$$u_x = X^{-}(x) * T(t)$$
$$u_{xx} = X^{=}(x) * T(t)$$
$$u_t = X(x) * T^{-}(t)$$

نعوض قيمة u_t وu_{xx} في المعادلة (2):

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \rightarrow \qquad X(x) * T^{-}(t) = \alpha^2\, X^{=}(x) * T(t) \qquad \rightarrow (6)$$

عن طريق فصل المتغيرات للمعادلة (6) بقسمه الطرفين $\alpha^2 X(x) * T(t)$ نحصل على:

$$\frac{T^{-}(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X^{=}(x)}{X(x)} = \lambda \qquad (7)$$

حيثλ ثابت ومنها يمكن الحصول على معادلتين بالنسبة للمعادلة الاولي هي:

$$\frac{T^{-}(t)}{\alpha^2 T(t)} = \lambda \qquad \rightarrow\ (8)$$

$$T^{=}(t) = \lambda\ \alpha^2 T(t)$$
$$T^{-}(t) - \lambda\ \alpha^2 T(t) = 0$$

ويمكن حلها

$$m - \alpha^2 \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \quad m = \alpha^2 \boldsymbol{\lambda} \ \ \rightarrow \ \ (\mathbf{9})$$

نوجد معادلة المساعد المميز

$$m = \pm \alpha^2 \lambda$$
$$T(t) = c_1 e^{\alpha^2 \lambda t} \qquad \rightarrow\ (10)$$

حيث c_1 ثابت عشوائي.

والنسبة للمعادلة الثانية هي:

$$\frac{X^{=}(x)}{X(x)} = \lambda \qquad \rightarrow \quad (11)$$

$$X^{=}(x) = \lambda X(x) \qquad \rightarrow\ \ X^{=}(x)\ -\ \lambda X(x) = 0$$

ويمكن حلها

$$m^2 - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \quad m^2 = \boldsymbol{\lambda}$$
$$m = \mp\sqrt{\lambda}$$
$$m_2 = +\sqrt{\lambda}$$
$$m_3 = -\sqrt{\lambda}$$

حيث 7 معادلة المساعد المميزة.

$$X(x) = c_2 e^{m_3 x} + c_3 e^{-m_4 x}$$

$$X(x) = c_2 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_3 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \rightarrow \ (12)$$

حيث يمكن كتابة المعادلتان(10) ,(12) على النحو التالي:

ويمكن كتابه الحال العام

$$u(x,t) = T(t) * X(x)$$
$$u(x,t) = \left(c_1 e^{\alpha^2 \lambda t}\right).\left(c_2 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_3 e^{-\sqrt{\lambda}x}\right)$$

نفرض ان

$C_1C_2{=}A$ $\qquad\qquad$ $C_1C_3{=}B$

$$u\ (x,t) = e^{\alpha^2 \lambda t}\ \left(Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}\right) \qquad (13)$$

هناك ثلاثة احتمالات لاختيار A.

1. $\lambda > 0$ هذا يتعارض مع الواقع لأنه يزداد بلاحدود مع مرور الوقت.
2. $\lambda = 0$ وهذا يتعارض أيضا مع الواقع لان درجة الحرارة ستبقي ثابته بمرور الوقت.
3. $\lambda < 0$ هذه هي الحالة الصحيحة لان درجة الحرارة سيزداد قليلا وستكون مقيدة بمرور الوقت.

نفرض ان λ تساوي:

$$\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\omega^2}$$
$$\sqrt{\lambda} = i\omega$$

فان المعادلة (13) تصبح على الشكل التالي:

$$u(x,t) = e^{-\omega^2 \alpha^2 t}\left(Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x}\right) \qquad (14)$$

نطبق قاعدة أويلر

$$e^{-ix} = \cos x + i \sin x$$

تصبح المعادلة (14) كالتالي:

$$u(x,t) = e^{-\omega^2\alpha^2 t}[A(\cos \omega x + i \sin \omega x) + B(\cos c\omega t - i \sin c\omega t)]$$

$$u(x,t) = e^{-\omega^2\alpha^2 t}[A \cos \omega x + Ai \sin \omega x + B\cos \omega x - Bi \sin \omega x]$$
$$u(x,t) = e^{-\omega^2\alpha^2 t}[(A+B) \cos ct\omega + (iA - iB) \sin ct\omega] \quad \rightarrow (15)$$

نفرض ان:

$$A + B = K \quad , iA + iB = L \quad \rightarrow (16)$$

عند التعويض عن قيم K, L في المعادلة 16 يمكن كتابة الحل العام لمعادلة انتشار الحرارة كالتالي:

$$u(x,t) = e^{-\omega^2\alpha^2 t}[K \cos \omega x + L \sin \omega x] \quad \rightarrow \quad (17)$$

إذا المعادلة (17) هي الحل العام لمعادلة الموجه.

الحل العام لمعادلة الحرارة مع شروط حدودية متجانسة:

اذا كان طرفا قضيب بطولl درجة حرارة صفر، وكانت درجة الحرارة الابتدائية دالة (x) في القضيب فان شروط الحدود هي

$1 - u(0,t) = 0$
$2 - u(l,t) = 0$

الشرط الابتدائي عند الزمن $t = 0$

$3 - u(x,0) = \emptyset(x)$

لإيجاد الحل العام لمعادلة الحرارة في ظل هذه الظروف سنعوض بشروط الحدودية او الابتدائية .

إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية صفر عند نهايتي طرفي قضيب عند استخدام الشرط الأول نجد:

$$1 - u(0,t) = 0$$
$$u(0,t) = e^{-\omega^2\alpha^2 t}[K\cos\omega x + L\sin\omega x]$$
$$0 = e^{-\omega^2\alpha^2 t}[K]$$

اما $K = 0$ **او** $e^{-\omega^2\alpha^2 t} \neq 0$ نعوض في المعادلة 13 نجد ان :

$$u(x,t) = e^{-\omega^2\alpha^2 t}[K\cos\omega x + L\sin\omega x]$$
$$u(0,t) = e^{-\omega^2\alpha^2 t}[L\sin\omega x]$$

عندما الشرط الثاني

$$2 - u(l,t) = 0$$

$$u(l,t) = e^{-\omega^2\alpha^2 t}[L\sin\omega l]$$
$$0 = e^{-\omega^2\alpha^2 t}[L\sin\omega l]$$
$$e^{-\omega^2\alpha^2 t} \neq 0$$

من سلسلة فوريا $L \neq 0$

$$\sin\omega l = 0$$
$$\omega l = n\pi \qquad \rightarrow \quad \omega = \frac{n\pi}{l} \qquad n = 0 \pm 1 \pm 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n(\alpha,t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2}\alpha^2 t}\left[L_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right] \quad \rightarrow \ (19)$$

هناك عدد لانهائي من الدوال في المعادلة 14 لذا فغن اى مجموعة عامة منها هي سلسلة لانهائية وبالتالي نفترض ان:

$$u(\alpha,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2}\alpha^2 t}\left[L_n \sin\frac{n\pi}{l}x - L_{-n}\sin\frac{n\pi}{l}x\right]$$

حيث ان $A_n = L_n - L_{-n}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2}\alpha^2 t}\left[\sin\frac{n\pi}{l}x\right] \quad \rightarrow \ (20)$$

$$3 - u(x,0) = \emptyset(x)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2}\alpha^2 t}\left[\sin\frac{n\pi}{l}x\right]$$
$$\emptyset(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\sin\frac{n\pi}{l}x\right]$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \ dx$$

وهي متسلسلة الجيب فوريا فان الثابت A_n يعطي بواسطة

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} \emptyset(x)\sin\frac{\pi n}{l}x \ dx \qquad (21)$$
$$n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

يسلط حل متسلسلة فوريا هذا الضوء على الطبيعة غير العكسية للانتشار، حيث تضمحل الأنماط ذات التردد العالي بشكل أسرع.

11- معادلة الموجة :

هي معادلة تفاضلية جزئية تصف انتشار الموجات في الأوساط المختلفة مثل الموجات الصوتية والموجات الضوئية تعتمد على المكان والزمان، وهي معادلة تفاضلية جزئية زائديه، تحكم الظواهر التذبذبية. لحقل قياسي $u(x,t)$، تكتب كالتالي[1][9] :

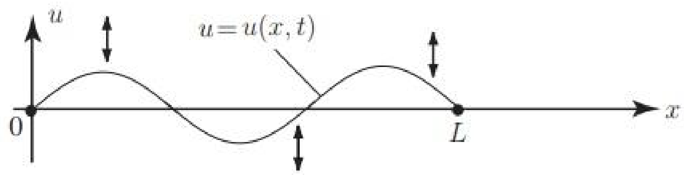
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (22)$$

في المجال $0 < t$, $1 < x \geq \infty$ تعرف المعادلة (22) باسم (معادلة الموجة)، حيث يعطي قيمة الثابت c^2 بالعلاقة $c^2 = \frac{T}{P}$ حيث T هو شد الوتر و p هي الكتلة لكل وحة طول من مادة الوتر.

11.1- الحل العام لتطبيق فيزيائي عن معادلة الموجة:

نفرض أن وتر مرن طوله 1 مشدود بإحكام بين دعامتين على نفس المستوي الأفقي بحيث يقع المحور (x) على طول الوتر كما في الشكل (2) التالي [3]، ويمكن اعتبار الوتر المرن وتراً او سلكاً دئماً، ولنفرض أن الوتر قد تم تحريكه (عن طريق النقر مثلاً)

بحيث يهتز في مستوي راسي، ولنرمز $u(x,t)$ إلى الازاحة الرأسية التي يتعرض لها الوتر عند النقطة x في الزمن t .



الشكل 2

إذا تم اهمال تأثيرات التخميد، مثل مقاومة الهواء، وإذا لم تكن سعة الحركة كبيرة جداً فإن $u(x,t)$ تحقق المعادلة (22)، و

هي معادلة تفاضلية الجزئية لمعادلة الموجه ولحل هذه المعادلة نستخدم طريقة فصل المتغيرات للمعادلة (22) نفرض ان كالتالي [1][9]:

$$u(x,t) = X(x), T(t) \qquad (23)$$

نشتق المعادلة (23) مرتين بالنسبة لـ X ، بالنسبة لـ T

$$u(x,t) = X(x), T(t) \rightarrow u_{xx} = X^{=}(x), T(t)$$
$$u_{tt} = X(x), T^{=}(t)$$

نعوض في المعادلة (22) كالتالي:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \rightarrow \qquad X(x), T^{=}(t) = c^2 X^{=}(x), T$$
$$\frac{T^{=}(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X^{=}(x)}{X(x)} = \lambda \qquad \rightarrow (24)$$

حيث λ ثابت

$$\frac{T^{=}(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \qquad \rightarrow \qquad T^{=}(t) = \lambda\ c^2 T(t)$$
$$T^{=}(t) - \lambda\ c^2 T(t) = 0$$
$$m^2 - c^2\lambda = 0 \qquad \rightarrow \quad m^2 = c^2\lambda$$

$$m = \pm C\sqrt{\lambda}$$
$$T(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{-m_2 t}$$

$$T(t) = c_1 e^{C\sqrt{\lambda}t} + c_2 e^{-C\sqrt{\lambda}t} \qquad \rightarrow (25)$$
$$\frac{X^{=}(x)}{X(x)} = \lambda$$
$$X^{=}(x) = \lambda X(x) \quad \rightarrow \quad X^{=}(x) - \lambda X(x) = 0$$
$$m^2 - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad m^2 = \boldsymbol{\lambda}$$
$$m = \sqrt{\lambda}$$
$$m_3 = \sqrt{\lambda}$$
$$m_4 = -\sqrt{\lambda}$$

$$T(t) = c_3 e^{m_3 x} + c_4 e^{-m_4 x}$$

$$T(t) = c_3 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}x} \qquad (26)$$

نعوض في المعادلة (25)، (26):

$$u(x,t) = T(t)\, X(x)$$
$$u(x,t) = \left(c_1 e^{C\sqrt{\lambda}t} + c_2 e^{-C\sqrt{\lambda}t}\right)\left(c_3 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) \qquad (27)$$

قيم λ لها ثلاث خيارات:

1- $\lambda > 0$ الموجه تزداد إلى ما لانهائي ولا يمكن حساب قيمة الموجه سوف يكون الاهتزاز عالي دون توقف ليس واقعي.

2- $\lambda = 0$ نجد ان قيمها ثابتة وهذا غير منطقي لأنها خط مستقيم.

3- $\lambda < 0$ هذا تقترب قيمة سالبة على ما لانهاية تقترب من الصفر.

نفرض أن:

$$\lambda = \omega^2$$
$$\sqrt{\lambda} = i\omega$$
$$= \left(c_1 e^{C\omega i t} + c_2 e^{-C\omega i t}\right).\left(c_3 e^{i\omega x} + c_4 e^{-i\omega x}\right)$$

نستخدم خاصية أويلر لتبسيط الحل:

$$e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$u(x,t) = [c_1(\cos c\omega t + i\sin c\omega t) + c_2(\cos c\omega t - i\sin c\omega t)]\,\big[[c_3(\cos\omega x + i\sin\omega x) + c_4(\cos\omega x - i\sin\omega x)]\big]$$

$$u(x,t) = [(c_1\cos c\omega t + c_1 i\sin c\omega t) + (c_2\cos c\omega t - c_2 i\sin c\omega t)]\big[[(c_3\cos\omega x + c_3 i\sin\omega x) + (c_4\cos\omega x - c_4 i\sin\omega x)]\big]$$

نأخذ العامل المشترك بالمعادلة السابقة:

$$u(x,t)=[\cos ct\omega\,(c_1+c_2)]+[\sin ct\omega\,(ic_1-ic_2)][\cos x\omega\,(c_3+c_4)] + [\sin x\omega\,(ic_3-ic_4)]$$

نفرض ان:

$$c_1+c_2=k_1$$
$$ic_1-ic_2=k_2$$

$$c_3+c_4=k_3$$
$$ic_3-ic_4=k_4$$

ومنها يمكن كتابة الحل العام لمعادلة الموجة كالتالي:

$$u(x,t)=[k_1\cos ct\omega+k_2\sin ct\omega][k_3\cos x\omega+k_4\sin x\omega] \qquad (28)$$

11.2- الكهرومغناطيسية:

في الكهرومغناطيسية تستخدم معادلة ماكسويل في تحليل المجالات الكهربائية و المغناطيسية ،مما يساهم في تطوير تقنيات الاتصالات والطاقة [10]، حيث تحتزل معادلات ماكسويل على معادلات موجية للحقلين الكهربائي والمغناطيسي في الفراغ :[4]

$$\nabla^2 E=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\quad , \quad \nabla^2 B=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \qquad (29)$$

تتنبأ هذه المعادلات بموجات كهرومغناطيسية تنتشر بسرعة الضوء $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$

11.3- حل دالمبير:

في حالة الاهتزاز الحر لوتر لانهائي، يجب أن تحقق المعادلة المطلوبة u(x,t) معادلة الموجة، للشروط الابتدائية $u(x,0)=\psi(x)$, $u(x,0)=\emptyset(x)$ يكون الحل:

$$A=\frac{1}{2}[\emptyset(x-ct)+\emptyset(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,ds \qquad (30)$$

تؤكد هذه الصياغة على السرعة المحدودة للانتشار والسلوك الموجي.

12- معادلة شرودنجر في الميكانيك الكم:

هي معادلة تفاضلية جزئية تصف كيفية تغير نظام فيزيائي مع الزمن. في عام 1926 نشر شرودنجر معادلتة الشهيرة التي تصف تطور الدالة الموجية لجسم كمي بمرور الزمن [6].

تعتبر المعادلة ألاساسية في ميكانيكا الكم غير نسبية ، وتلعب دورا مشابه لقوانين نيوتن في الميكانيك الكلاسكية وتصف تطور الحالة الكمومية لنظام فيزيائي مع الزمن ويمكن اشتقاق معادلة شرودنجر من مبداء حفظ الطاقة ، و تشكل معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن أساس الميكانيكا الكمومية غير النسبية[8]، وصيغتها المعتمدة هي:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left[-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2+V(x,t)\right]\Psi \qquad (31)$$

هي دالة الموجة $\Psi=(r,t)$ و $V(r)$ هي طاقة الوضع.

1.1 الصيغة غير المعتمدة على الزمن:

عندما لا يعتمد جهد على الزمن بشكل صريح، يمكن استخدام فصل المتغيرات، و نفترض ان الدالة الموجية يمكن كتابتها كحاصل ضرب دالة في المكان فقط ودالة في الزمن فقط:

$$\Psi(r,t)=\Psi(r)*\varphi(t)$$

للحالات المستقرة $\Psi(r,t)=\Psi(r)e^{-iEt/h}$ ، و تختزل المعادلة على:

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2\Psi(r)+V(r)\Psi(r)=E\Psi(r) \qquad (32)$$

تنتج مشكلة القيمة الذاتية هذه مستويات طاقة كمومية E_n ودوال موجية Ψ_n .

ويمكن حل المعادلتين السابقين يعطي قيمة الدالتين $\Psi(r,t),\Psi(r)$ هما عبارة عن دالتين موجيتين تعطيان بالشكل العام التالي:

$$\Psi(x)=A\sin(kx)+B\cos(kx) \qquad (33)$$

$$\Psi(r,t)=\Psi_0(r)e^{i2\pi(kx-vt)} \qquad (34)$$

12.2 جسيم في صندوق جهد لانهائي(بئر جهد لانهائي):

تعتبر جسيماً محصورا في المنطقة $0 < L > x$ حيث $V = 0$ داخل الصندوقوما لانهاية خارجة. الشرط الحدودي يقتضي

$\varphi(0)=\varphi(L)=0$ حل معادلة شرودنجر يعطي

$$b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , \quad E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad (35)$$

$n = 1,2,3, \dots \dots \dots \dots$

يوضح هذا النموذج تكميم الطاقة وطاقة نقطة الصفر، حيث لا يمكن للجسيم أن يأخذ أي قيمة طاقة، بل قيماً محددة منفصلة . هذه الظاهرة لامثيل لها في الفيزياء الكلاسيكية[10].

13– الطرق العددية والتطبيقات الناشئة

تعد التقنيات العددية المتقدمة، مثل طريقة العناصر المحددة (FEM) والطرق الطيفية، أساسية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية. على سبيل المثال، معادلة شرودنجر غير الخطية:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{1}{2}\nabla^2\Psi+k|\Psi|^2\Psi \qquad (36)$$

صيغة نموذج تكاثفات بوز– أنيشتاين والموجات المنعزلة البصرية [7].

13.1 تحليل مقارن:

حللنا معادلة الحرارة باستخدام مخططات الفروق المحددة الصريحة (EFD) وكرانك–نيكولسون (CN). أظهرت طريقة كرانك–نيكولسون استقراراً فائقاً لفترات زمنية، كبيرة كما هو موضح في الجدول 1.

الجدول1: مقارنة الخطأ العددي لـ $t = 0$, $\alpha = 1$

الطريقة	جذر متوسط مربع الخطأ(RMSE)	الاستقرار
EFD	0.045	مشروط
CN	0.012	غير مشروط

14– الخلاصة

تؤكد هذه الدراسة على مركزية المعادلات التفاضلية الجزئية في الفيزياء، من نظرية الحقل الكلاسيكي إلى الميكانيكا الكمومية. تمثل معادلات الحرارة والموجة، وشرودنجر تنوع العمليات الفيزيائية التي يتم صياغتها كنموذج بواسطة المعادلات التفاضلية الجزئية، وتستكشف الاعمال المستقبلية المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية وتطبيقاتها في نماذج الانتشار الشاذ والأنظمة الكمية المعقدة.

المراجع

1- آس فارلو –ترجمة د .مها عواض الكبيسي –المعادلات التفاضلية الجزئية–منشورات جامعة عمر المختار البيضاء – بنغازي – ليبيا–2005.

2- Farlow,S,J.(1993).Partial Differential Equation for Scientists and Engineers. Dover Publications.

3- Mohammed Hussein Alshmary. (2020) .Applications of Partial Differential Equations. Journal of Physics: Conference Series 1591 (2020) 012105 .

4- Caslaw,H,S.,& Jaeger,J.C. (1959). Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press.

5- Grffiths,D,J. (2017).Introduction to Electrodynamics. Cambridge University Press.

6- Grffiths,D,J. (2018).Introduction to Quantum Mechanics. Cambridge University Press.

7- Taha,T.R.,& Ablowitz, M.J.(1984). Analytical and Numerical Aspects of Certain Nonlinear Evolution Equations. Journal of Computational Physics, 55(2), 192-202.

8- Dr Abdallah Mazzeer, The Schrödinger Equation , 353 PHYS - CH7 – Part2.

9- Nakhe H. Asmar(2005), Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems. Second Edition, University of Missouri.

10- https://ar.wikipedia.org