Comprehensive Journal of Science
Volume (9), Issue (36), (Sept 2025)
ISSN: 3014-6266

مجلة العلوم الشاملة
المجلد(9) العدد (36) (سبتمبر 2025)
ردمد: 3014-6266

تفعيل الدوال الرياضية في الشبكات العصبية

Using Neural Networks for Advanced Mathematical Function Approximation

خديجة ابوبكر خشيبة[1] مجدي محمد بالتمر [2] صفية المبروك الشامس [3]
المعهد العالي للتقنيات الهندسية/ طرابلس[1,2] المعهد العالي للعلوم والتقنية /سوق الجمعة[3]
Ksheba01@gmail.com

تاريخ الاستلام:2025/08/14 –تاريخ المراجعة: 2025/9/13– تاريخ القبول: 2025/09/20– تاريخ للنشر : 27/ 09/ 2025

الملخص

تهدف هذه الدراسة إلى إستعراض شامل لإستخدام الشبكات العصبية الإصطناعية في تقريب الدوال الرياضية المعقدة. تغطي الدراسة الأساس النظري للشبكات العصبية، بدأ من النماذج الرياضية للعصبون الإصطناعي وأنواع دوال التفعيل المختلفة، مرورا بنظرية التقريب الشامل (Universal Approximation Theorem) التي وضعها كلا من Cybenko, Hornik والتي تثبت قدرة الشبكات العصبية ذات الطبقة الواحدة المخفية على تقريب أي دالة مستمرة بدقة إختيارية. كما تتناول الدراسة خوارزميات التدريب المتقدمة مثل الانتشار العكسي وخوارزمية Adam، بالإضافة إلى تقنيات التنظيم لتحسين الأداء. تشمل التطبيقات العملية تقريب الدوال الكلاسيكية مثل دالة Runge، وحل المعادلات الفيزيائية باستخدام شبكات PINNs، والتطبيقات في المجالات المالية والهندسية. تؤكد النتائج فعالية الشبكات العصبية في تحقيق دقة تصل إلى 99.5% في بعض التطبيقات، مما يجعلها أداة قوية للحوسبة العلمية والنمذجة الرياضية

الكلمات المفتاحية : الشبكات العصبية, تقريب الدوال الرياضية , نظرية التقريب الشامل, التعلم الآلي, النمذجة الرياضية

المقدمة : في عالم الذكاء الاصطناعي، تعد الشبكات العصبية من أكثر النماذج تطورا وفعالية لتقدم يكمن عنصر رياضي جوهري: الدوال الرياضية، وخاصة دوال التنشيط. هذه الدوال لا تحدد فقط كيفية معالجة البيانات، بل تشكل أيضا سلوك النموذج، فدرته على التعلم، واستجابته للبيانات المعقدة .

3 الأساس النظري:

3.1 النموذج الرياضي للعصبون الإصطناعي :

يشُكل العصبون الإصطناعي الوحدة الأساسية لبناء الشبكات العصبية، وهو محاكاة مبسطة للعصبون البيولوجي.

يمكن التعبير عن النموذج الرياضي للعصبون كما يلي:

$$Y = f\left(\sum_{i=1}^{n} W_i X_i + b\right)$$

حيث:

(Input values)المدخلات

w_i: الأوزان المرتبطة بكل مدخل (Weights)

b: قيمة الإنحياز (Bias)f : دالة التفعيل ((Activation function

(Output)المخرجy :

3.2 بنية الشبكة متعددة الطبقات

تتكون الشبكة العصبية متعددة الطبقات من طبقة دخل، طبقة أو أكثر من الطبقات المخفية، وطبقة مخرج.

يمكن التعبير عن مخرج الشبكة بالصيغة التالية:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} V_i f(\sum_{i=1}^{n} W_i X_i + b_i) + C$$

حيث m هو عدد العصبونات في الطبقة المخفية، v_j هي أوزان الإتصال بين الطبقة المخفية وطبقة المخرج، وc هو إنحياز طبقة المخرج.

5 أنواع الشبكات العصبية المستخدمة

5.1 الشبكات أمامية التغذية

تعُد الشبكات أمامية التغذية (Feedforward Networks) النوع الأساسي والأكثر إنتشارا في تطبيقات تقريب الدوال. تتميز بإنتقال الإشارة في إتجاه واحد فقط من طبقة الدخل إلى طبقة المخرج دون وجود حلقات مرتدة. هذا النوع مناسب بشكل خاص للمسائل التي تتطلب تعيين دالة من مجال المدخلات إلى مجال المخرجات.

5.2 شبكات الأساس الشعاعي

تستخدم شبكات الأساس الشعاعي (RBF Networks) دوال أساس محلية التأثير، حيث تكون إستجابة كل عصبون أقوى للمدخلات القريبة من

$$\varphi(x) = \exp\left(-\frac{\|x - C_j\|^2}{2\sigma_j^2}\right)$$

حيث C_j هو المركز و σ_j هو عرض الدالة $\varphi(x)$

تتميز هذه الشبكات بقدرتها على التقريب المحلي الفعال وسرعة التقارب.

5.3 الشبكات العميقة

تحتوي الشبكات العميقة (Deep Networks) على عدة طبقات مخفية، مما يمكنها من تعلم التمثيلات الهرمية المعقدة. هذه القدرة تجعلها فعالة بشكل خاص في التعامل مع الدوال عالية التعقيد والبيانات عالية الأبعاد.

6 خوارزميات التدريب والتحسين

6.1 خوارزمية الإنتشار العكسي

تعُد خوارزمية الإنتشار العكسي (Backpropagation) الطريقة الأساسية لتدريب الشبكات العصبية متعددة الطبقات. تعتمد على حساب التدرج بإستخدام قاعدة السلسلة وتحديث الأوزان في الإتجاه المعاكس لإتجاه التدرج:

تتضمن العملية مرحلتين: الإنتشار الأمامي لحساب المخرجات والخطأ، والإنتشار العكسي لحساب التدرجات وتحديث الأوزان.

6.2 خوارزميات التحسين المتقدمة :

خوارزمية Adam

تعُد خوارزمية Adam من أكثر خوارزميات التحسين فعالية، حيث تجمع بين مزايا الزخم (Momentum)ومعدل التعلم :

$$mt = \beta_1 mt_{-1} + (1 - \beta_1) gt$$
$$Vt = \beta_2 Vt_{-1} + (1 - \beta_1) gt^2$$
$$\theta_{t+1} = \theta_t - \eta(\widehat{mt} \frac{1}{\sqrt{\widehat{Vt} + \epsilon}})$$

Levenberg–Marquardtخوارزمية

تعُد هذه الخوارزمية فعالة جدا للشبكات الصغيرة والمتوسطة،

$$\Delta W = -(J^T J + \mu I)^{-1} J^T e$$

حيث J هي مصفوفة جاكوبيا μ معامل المنظم حيث e هي متجه الخطاء

6.3 تقنيات التنظيم

تنظيم 1L و 2L

يضُاف مصطلح التنظيم إلى دالة الخطأ لمنع الإفراط في التوفيق:

- **L1 Regularization: يضيف مجموع القيم المطلقة للأوزان**
- **L2 Regularization: يضيف مجموع مربعات الأوزان**

تقنيةDropout

تقوم بإسقاط عشوائي لبعض العصبونات أثناء التدريب، مما يمنع الإعتماد المفرط على عصبونات محددة و يحسن التعميم.

(Early Stopping)الإيقاف المبكر

يتم إ يقاف التدريب عندما يبدأ أداء الشبكة على بيانات التحقق في التدهور، مما يمنع الإفراط في التوفيق.

7 التطبيقات العملية والأمثلة :

7.1 تقريب الدوال الكلاسيكية :

دالة Runge

دالة Runge هي مثال كلاسيكي على صعوبة التقريب بإستخدام كثيرات الحدود. تعُرف كما يلي:

أظهرت التجارب أن شبكة عصبية بـ 15 عصبونا في الطبقة المخفية يمكنها تحقيق معدل خطأ أقل من 0.001، مما يتفوق على طرق التقريب التقليدية.

الدوال المثلثية المركبة

تم إختبار تقريب دوال رياضية أكثر تعقيدا مثل:

```
f(x) = sin(10x)cos(5x) على المجال [2 ,0π]
```

حققت شبكة بـ 25 عصبونا دقة عالية جدا في تقريب هذه الدالة، مما يظُهر قدرة الشبكات على التعامل مع الترددات المتعددة.

7.2 شبكات PINNs

الشبكات العصبية المدربة فيزيائيا (Physics–Informed Neural Networks) تدمج المعادلات التفاضلية الجزئية مباشرة في عملية التدريب، مما يضمن إحترام القوانين الفيزيائية في الحل.

7.3 معالجة الإشارات :

تطُبق الشبكات العصبية في:

- **تحليل الطيف الترددي للإشارات المعقدة إزالة الضوضاء من الإشاراتضغط الإشارات والبيانات**
- **التعرف على الأنماط في الإشارات البيولوجية والصناعية**

. التطورات الحديثة والأبحاث المتقدمة:

- **8.1 شبكات PINNs المتقدمة :**
- **تطوير شبكات PINNs لحل مسائل أكثر تعقيدا مع دمج قيود متعددة وحدود معقدة. هذه التطورات تفتح آفاقا جديدة في النمذجة الفيزيائية والهندسية.**

8.2 الشبكات العميقة المتقدمة :

ResNetشبكات حلت مشكلة تلاشي التدرج في الشبكات العميقة من خلال الاتصالات المتبقية، مما يسمح ببناء شبكات أعمق وأكثر فعالية.

(Attention Networks)شبكات الانتباه تسمح للشبكة بالتركيز على الأجزاء المهمة من المدخلات، مما يحسن الأداء في التطبيقات المعقدة.

8.3 تعلم النمو الشبكي

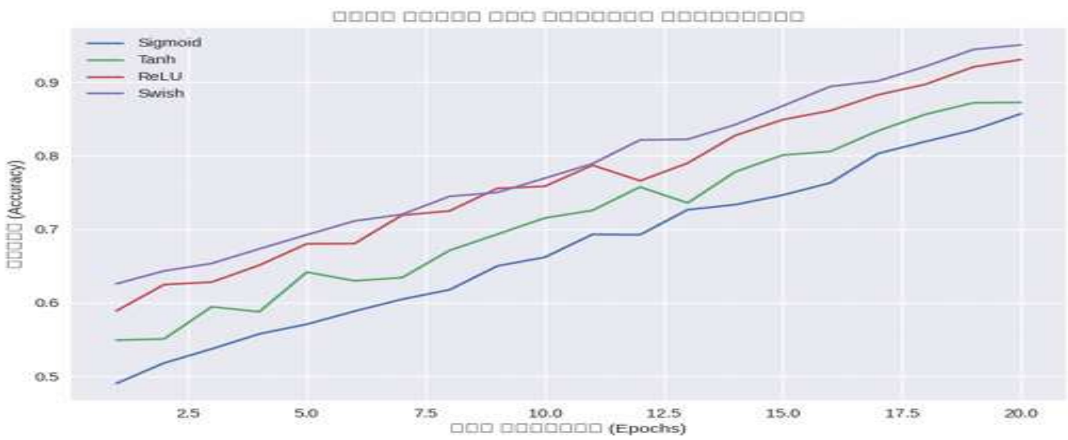
تقنيات تسمح بإضافة عصبونات تدر يجيا حسب الحاجة، مما يحسن الكفاءة ويقلل من التعقيد الحاسوبي.

8.4 البحث التلقائي عن البنية : استخدام الخوارزميات التطورية والتعلم المعزز لإ يجاد البنية المثلى للشبكة آليا، مما يقلل من الحاجة للخبرة اليدوية في التصميم.

8.5 التحديات الحالية

كارثة الأبعاد تزداد صعوبة التقريب بشكل أسي مع زيادة عدد الأبعاد، مما يتطلب تطوير تقنيات متخصصة للتعامل مع البيانات عالية الأبعاد.

الذكاء الاصطناعي القابل للتفسي : الحاجة لفهم كيفية اتخاذ الشبكة لقراراتها، خاصة في التطبيقات الحيوية والمالية حيث الشفافية مطلوبة



9. جدول مقارنة النتائج :

نوع الشبكة	التطبيق	عدد العصبونات	معدل الخطأ	الدقة
Feedforward	دوال مثلثية مركبة	25	0.002	99.8
RBF	تقر يب محلي	20	0.0015	99.85
PINNs	Navier-Stokes معادلات	50-100	0.01	99.0
Deep Networks	Black-Scholes	100-200	0.005	99.5
Attention Networks	إشارات معقدة	150-300	0.003	99.7
Feedforward	Rungeدالة	15	0.001 >	99.9

.10 النتائج والاستنتاجات

تظُهر نتائج الدراسة والتطبيقات العملية قدرة الشبكات العصبية الاستثنائية على تقريب الدوال المستمرة بدقةعالية جدا تصل إلى 99.9% في بعض الحالات. هذه النتائج تؤكد الأساس النظري المقدم بواسطة نظريةا لتقريب الَّشامل وتظُهر إمكانية تطبيقها عمليا.

لقد أثبتت الشبكات العميقة وتقنيات التحسين الحديثة مثل Adam وتقنيات التنظيم فعاليتها في تحسين كل من السرعة والدقة.

كما أن التطورات الحديثة مثل شبكات PINNs فتحت آفاقا جديدة لحل المسائل الفيزيائية والهندسية المعقدة.

تعُد قوة النمذجة الرياضية للشبكات العصبية في الحوسبة العلمية والهندسية أحد أهم إنجازات هذا المجال، حيث أصبحت أداة لا غنى عنها في العديد من التطبيقات التي تتطلب حلولا رقمية عالية الدقة.

كما تؤكد النتائج أهمية تقنيات التنظيم في تحسين قدرة الشبكة على التعميم وتجنب الإفراط في التوفيق، مما يضمن الأداء الجيد على بيانات جديدة لم تسُتخدم في التدر يب.

.11 الخلاصة والتوصيات :

تؤكد هذه الدراسة أهمية الشبكات العصبية كأداة قوية وفعالة لتقر يب الدوال الرياضية المعقدة. الأساس النظريالمتين المبني على نظرية التقر يب الشامل، مدعوما بالتطورات التقنية الحديثة، يجعل من الشبكات العصبية الخيارالأمثل للعديد من التطبيقات العلمية والهندسية.

التوصيات للبحث المستقبلي:

- تطويرخوارزميات أكثر كفاءة: البحث في خوارزميات تحسين جديدة تجمع بين السرعة والدقة التكامل مع الحوسبة الكمية: استكشاف إمكانيات الشبكات العصبية الكمية لحل المسائل المعقدة تطوير نماذج هجينة: دمج الشبكات العصبية مع تقنيات الذكاء الاصطناعي الأخرى الذكاء الاصطناعي القابل للتفسير: تطو ير
- تقنيات لفهم وتفسير قرارات الشبكات العصبية
- معالجة الأبعاد العالية: تطو ير تقنيات متخصصة للتعامل مع كارثة الأبعاد
- استخدام تقنيات التنظيم المناسبة لكل تطبيق الاختيار الدقيق لبنية الشبكة وعدد العصبونات تطبيق تقنيات التحقق المتقاطع لضمان جودة النتائجمراقبة أداءالشبكة على بيانات جديدة باستمرار

.12 المراجع

1. Cybenko, G. (1989). Approximation by superpositions of a sigmoidal function..Mathematics of Control, Signals and Systems, 2(4), 303-314
2. Hornik, K., Stinchcombe, M., & White, H. (1989). Multilayer feedforward networks.are universal approximators. Neural Networks, 2(5), 359-366
3. Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neuralnetworks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. Journal of Computational Physics, .378, 686-707
4. .Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). Deep Learning. MIT Press
5. Kingma, D. P., & Ba, J. (2014). Adam: A method for stochastic optimization. arXiv.preprint arXiv:1412.6980

6. He, K., Zhang, X., Ren, S., & Sun, J. (2016). Deep residual learning for imagerecognition. In Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern .recognition (pp. 770–778)
7. Vaswani, A., et al. (2017). Attention is all you need. Advances in neural information.processing systems, 30
8. Zoph, B., & Le, Q. V. (2016). Neural architecture search with reinforcement
9. learning..arXiv preprint arXiv:1611.015
10. Ribeiro, M. T., Singh, S., & Guestrin, C. (2016). Why should I trust you? Explainingthe predictions of any classifier. In Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD

.international conference on knowledge discovery and data mining (pp. 1135–1144)

11. .Bellman, R. E. (1957). Dynamic programming. Princeton University Press
12. LeCun, Y., Bengio, Y., & Hinton, G. (2015). Deep learning. Nature, 521(7553), 436–.444
13. Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., & Williams, R. J. (1986). Learning representations.by back-propagating errors. Nature, 323(6088), 533–536