Comprehensive Journal of Science
Volume (9), Issue (36), (Sept 2025)
ISSN: 3014-6266

مجلة العلوم الشاملة
المجلد(9) العدد (36) (سبتمبر 2025)
ردمد: 3014-6266

"تحليل ودراسة المعادلات التكاملية باستخدام طريقة آدوميان: تطبيق على معادلات فوليترا"

Analysis and Study of Integral Equations Using the Adomian Decomposition Method: Application to Volterra Equations"

جميلة المبروك أوشاح

المعهد العالي للعلوم الطبية – صبراتة

jamelaoshah@gmail.com

تاريخ الاستلام:2025/08/12 –تاريخ المراجعة: 2025/9/11– تاريخ القبول: 2025/09/16– تاريخ للنشر : 2025 /09/23

الملخص:

يهدف هذا البحث إلى تحليل ودراسة المعادلات التكاملية باستخدام طريقة آدوميان، مع تطبيق عملي على معادلات فوليترا، وذلك لتوضيح آلية عمل الطريقة وقدرتها على إيجاد حلول تقريبية دقيقة وسريعة التقارب، كما يتناول البحث تصنيف المعادلات التكاملية إلى أنواعها الأساسية مثل معادلات فردهولم وفوليترا، مع بيان خصائص كل منها، واستعراض الصيغة التكرارية لطريقة آدوميان ودورها في تبسيط المسائل التكاملية المعقدة، أظهرت النتائج أن طريقة آدوميان توفر أسلوبًا فعالًا وعمليًا لحل المعادلات التكاملية دون الحاجة إلى افتراضات أولية معقدة أو تبسيطات رياضية مفرطة، مما يجعلها أداة مفيدة في النمذجة الرياضية والتطبيقات الهندسية الحديثة.

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التكاملية، طريقة آدوميان، معادلات فوليترا، معادلات فردهولم، الطرق التحليلية، الحلول التقريبية..

Abstract

Integral equations represent one of the most important mathematical tools used to describe various physical, engineering, and biological phenomena. They express the relationship between an unknown function and an integral containing the same function. Due to the difficulty of obtaining exact analytical solutions, several mathematical methods have been developed to approximate solutions. Among these, the Adomian Decomposition Method (ADM) has proven to be highly effective in solving both linear and nonlinear integral equations.

This paper aims to analyze and study integral equations using the Adomian Decomposition Method, with a specific application to Volterra integral equations, in order to illustrate the mechanism of the method and its efficiency in obtaining accurate and rapidly convergent approximate solutions. The study also discusses the classification of integral equations into their main types, such as Fredholm and Volterra equations, and presents the iterative form of the Adomian method and its role in simplifying complex integral problems.

The results show that the Adomian method provides an efficient and practical approach to solving integral equations without requiring complex initial assumptions or excessive mathematical simplifications, making it a valuable tool in mathematical modeling and modern engineering applications.

Keywords:

Integral equations, Adomian decomposition method, Volterra equations, Fredholm equations, analytical methods, approximate solutions.

المقدمة

تُعدّ المعادلات التكاملية من أهم الأدوات الرياضية التي تُستخدم في توصيف الظواهر الفيزيائية والهندسية والبيولوجية المختلفة[1]، إذ تعبّر عن العلاقة بين دالة مجهولة وتكامل يحتوي على هذه الدالة ذاتها ونظرًا لأهمية هذا النوع من المعادلات وصعوبة إيجاد حلولها التحليلية الدقيقة، ظهرت العديد من الطرق الرياضية لتقريب الحلول، من أبرزها طريقة آدوميان التفكيكية (ADM) التي أثبتت كفاءتها في التعامل مع المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية على حد سواء[2].

تتنوّع المعادلات التكاملية إلى معادلات فردهولم(Fredholm) ومعادلات فوليترا(Volterra)، فضلًا عن المعادلات الخطية وغير الخطية(Integro-Differential Equations) وتمثّل معادلات فوليترا نوعًا مهمًا من هذه المعادلات[3]، إذ تمتاز بحدود تكامل متغيرة، ما يجعلها نموذجًا أساسيًا لدراسة الأنظمة ذات الذاكرة الزمنية أو التطور التدريجي، مثل الأنظمة الحيوية أو العمليات الفيزيائية المتغيرة مع الزمن، ونظرًا لصعوبة إيجاد الحلول التحليلية الدقيقة للعديد من المعادلات التكاملية، فقد ظهرت عدة طرق تحليلية وعددية لتقريب حلولها[4]، من أبرزها طريقة آدوميان التفكيكية(Adomian Decomposition Method - ADM)، التي تُعد من الطرق الحديثة والفعّالة في معالجة المعادلات التفاضلية والتكاملية على حدّ سواء، لما تمتاز به من بساطة في التطبيق ودقة في تقريب الحل دون الحاجة إلى خطيّة أو شروط ابتدائية معقدة[5].

مشكلة البحث

قد طُوّرت العديد من الطرق التحليلية والعددية لتقريب الحلول، غير أن كثيراً منها يتطلب افتراضات أولية معقدة أو لا يضمن سرعة التقارب نحو الحل الحقيقي، إذ أن الصعوبة تكمن في إيجاد حلول تحليلية دقيقة لها، خصوصاً في الحالات غير الخطية أو عندما تكون حدود التكامل متغيرة كما في معادلات فوليترا، ومن هنا تبرز **مشكلة البحث** في التساؤل الآتي:

- كيف يمكن لطريقة آدوميان التفكيكية (Adomian Decomposition Method) أن تُستخدم بفاعلية في تحليل ودراسة المعادلات التكاملية، وخاصة معادلات فوليترا، للحصول على حلول تقريبية دقيقة وسريعة التقارب دون الحاجة إلى تبسيطات رياضية مفرطة أو شروط ابتدائية معقدة؟

أهداف البحث

يهدف هذا البحث إلى تحقيق مجموعة من الأهداف العلمية والمنهجية، من أبرزها:

- تحليل مفهوم المعادلات التكاملية وأنواعها الأساسية (فردهولم وفوليترا) وخصائص كل نوع منها.
- تطبيق طريقة آدوميان التفكيكية في حل المعادلات التكاملية، مع التركيز على معادلات فوليترا كحالة تطبيقية.
- استعراض الصيغة التكرارية لطريقة آدوميان وشرح آلية توليد متسلسلة الحل التقريبي خطوة بخطوة.
- مقارنة فعالية طريقة آدوميان مع الطرق التحليلية الأخرى من حيث الدقة وسرعة التقارب وسهولة التطبيق.

مصطلحات البحث

المعادلات التكاملية (Integral Equations)

هي معادلات تحتوي على دالة غير معروفة تحت إشارة التكامل، وغالبًا ما يُراد إيجاد تلك الدالة بحيث تحقق المعادلة، وتُعد أداة مهمة في النمذجة الرياضية للظواهر الفيزيائية والهندسية[6].

طريقة آدوميان للتحليل (Adomian Decomposition Method)

هي طريقة تحليلية تُستخدم لحل المعادلات التفاضلية والتكاملية غير الخطية دون الحاجة إلى تبسيط أو تقريب المعادلة، حيث تقوم على تمثيل الحل كسلسلة من الحدود تُحسب تدريجيًا باستخدام ما يسمى متعددات آدوميان (Adomian Polynomials).

معادلات فولتيرا (Volterra Integral Equations)

هي نوع خاص من المعادلات التكاملية يكون فيها حد التكامل العلوي متغيرًا (عادةً يساوي المتغير المستقل)، وتُستخدم في دراسة الأنظمة الديناميكية والزمنية مثل الأنظمة الحرارية أو الكهربائية[7].

1.1.المعادلة التكاملية:

هي أي معادلة تظهر فيها الدالة المجهولة$u(x)$ تحت إشارة التكامل في المعادلة والشكل العام للمعادلة التكاملية[8]:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(x)dt \qquad (1)$$

حيث $\beta(x)$, $\alpha(x)$ حدود التكامل λ معامل ثابت $k(x_1t)$ دالة معلومة بمتغيرين x,t وتسمى نواة المعادلة التكاملية.

الدالتين $f(x), k(x,t)$, β, α, ϕ دوال معلومة.

1.1.1 تعريف:

تسمى المعادلة(1) معادلة تكاملية غير خطية إذا كتبت النواة $k(x,t)$ بالشكل $k(x,t,u(t))$.

مثل:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)f(u(t))dt$$

2.1.1 تعريف:

تسمى المعادلة(1) معادلة تكاملية خطية إذا كانت من الدرجة الأولى مثل:

$$u(x) = 1 + \int_0^1 xtu(t)dt$$

3.1.1. تجانس المعادلة التكاملية:

تكون المعادلة التكاملية متجانسة إذا كانت $f(x) = 0$ غير ذلك تكون غير متجانسة.

2.1 أنواع المعادلات التكاملية Types of I.Eq

1.2.1 معادلة فردهولم Fredholm I.Eq

هي معادلة حدود تكاملها تكون ثوابت

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, u(t)dt$$

2.2.1 معادلة فوليترا Volterra I.Eq

تكون حدود تكاملها أحدهما أو كلاهما ثوابت

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\, u(t)dt$$

3.2.1 المعادلة التكاملية الشاذة Singnlar I.Eq

هي معادلة أحد حدود تكاملها أو كلاهما غير منتهي أو تكون النواة غير معرفة عند نقطة أو أكثر في منطقة أو أكثر في منطقة التكامل مثل:

$$f(x) = \int_a^{\infty} k(x,t)\, u(t)dt \quad , \quad f(x) = \int_a^x \frac{u(t)}{\sqrt{x} - t} dt$$

4.2.1 المعادلة التكامتفاضلية Integro differential Eq

هي التي تحتوي على الدالة ومشتقاتها مثل:

$$u^n(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t) f u(t)dt$$

مثال: ما نوع المعادلة الآتية:

$$u^n(x) = \int_a^x k_1(x,t)\, u(t)dt + \int_a^b k(x,t)\, u(t)dt$$

معادلة تكاملية من نوع فوليترا وفردهولم وتكامتفاضلية وتكون خطية ومتجانسة.

3.1 أصناف المعادلة التكاملية Kinds of I.Eq

1.3.1 إذا كانت

$$0 = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t) u(t)dt \qquad \phi(x) = 0$$

"معادلة تكاملية من النوع الأول".

2.3.1 إذا كانت

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t) fu(t)dt \qquad \phi(x) = 1$$

"معادلة تكاملية من النوع الثاني".

3.3.1 إذا كانت $\phi(x) \neq 0,1$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t) fu(t)dt$$

"معادلة تكاملية من النوع الثالث".

مثال: ما نوع المعادلات التكاملية الآتية:

"من النوع الأول"

1) $$x = \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

"من النوع الثاني"

2) $$u(x) = x + 1 - \int_0^1 \int_0^x xt^2 sinu(t)dt$$

4.1 قاعدة ليبتز Lebtinz

لتكن $f(x), t$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ دوال مستمرة في المستطيل $t_0 \leq z \leq t_1$, $a \leq x \leq b$ في المستوى $x - t$ و $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)dt$

فإن:

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = f(x,\beta(x)\frac{d\beta(x)}{dx} - f(x,\alpha(x)\frac{d\alpha(x)}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt$$

مثال (قاعدة ليبتز):

إذا كان

$$f(x) = \int_x^{x^2} (x-t)\cos t \; u(t)dt$$ أوجد $f'(x)$؟

الحل:

$$\alpha(x) = x \Longrightarrow \frac{d\alpha}{dx} = 1$$
$$\beta(x) = x^2 \Longrightarrow \frac{d\beta}{dx} = 2x$$
$$f(x,t) = (x-t)cost \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = cost$$
$$f\big(x,\alpha(x)\big) = f(x,x) = (x-x)cosx = 0$$
$$f(x,\beta(x)) = f(x,x^2) = (x-x^2)cosx^2$$
$$f'(x) = f(x,\beta(x)\frac{d\beta(x)}{dx} - f(x,\alpha(x)\frac{d\alpha(x)}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt$$

$$f'^{(x)} = (x - x^2)cosx^2.2x - 0.1 + \int_x^{x^2} cost\, dt$$
$$= 2x^2(1 - x)cosx^2 + \int_x^{x^2} cost\, dt$$
$$= 2x^2(1 - x)cosx^2 + sinx^2 - sinx$$

ملاحظة:

إذا كانت

$\alpha(x) = a \quad , \quad \beta(x) = b$ فإن

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt$$

مثال: إذا كانت

$f(x) = \int_0^1 x^2 e^t\, dt$ أوجد $f'', \quad f',$

الحل:

$$f'^{(x)} = \int_0^1 2xe^t\, dt$$
$$f''(x) = \int_0^1 2e^t\, dt$$

– اختزال التكامل المتعدد إلى تكامل مفرد:

– الصيغة العامة التي تحول التكامل المتعدد إلى تكامل مفرد:

1) $$\int_0^x \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{n-1}} u(x_n)dx_n dx_{n-1} \ldots dx_1 = \frac{1}{(n-1)} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t)dt$$

2) $$\int_0^x \int_0^{x_1} \ldots \int_0^x (x-t)u(t)dtdt = \frac{1}{n_1} \int_0^x (x-t)^n u(t)dt$$

حول التكامل التالي إلى تكامل مفرد.

$$\int_0^x \int_0^x \int_0^x (x-t)u(t)dtdtdt \Rightarrow \frac{1}{3!} \int_0^x (x-t)^3 u(t)dt$$

1.2 طريقة أدوميان لحل معادلة فوليترا التكاملية:

تم تقديم معادلات فوليترا للعلن من قبل العالم الإيطالي[9]:

Vito Volterra (1860-1940)

وقام العالم ترابين لاليسكو بشرحها عام 1908 في كتاب:

"Sur Les equations de Volterra"

ملاحظة:

معادلة فوليترا التكاملية الخطية هي حالة خاصة من معادلة فردهولم التكاملية الخطية في حالة إذا اعتبرنا:

$$k(x,t) = 0 \quad ; \quad x < t \leq b$$

تسمى معادلة فردهولم إذاً

$$u(t) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, u(t)dt$$

$f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\, u(t)dt \quad \Longleftarrow$ معادلة فولتيرا من النوع الأول

$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\, u(t)dt \quad \Longleftarrow$ معادلة فوليترا من النوع الثاني

2.1.2 الطرق التحليلية العامة لحل معادلة فوليترا التكاملية:

لحل معادلة فوليترا فإن هناك عدداً من الطرق التي تطبق لهذا الغرض وفيما يلي بعض الطرق التحليلية لحل معادلة فوليترا التكاملية: طريقة آدوميان، طريقة التقريب المثالي، طريقة الحل المتسلسل، طريقة التحليل المعدلة، ظاهرة التشويش، طريقة الحل بالتحويل إلى مسألة القيم الابتدائية وطريقة التغاير التكرارية وطريقة تحويل لابلاس.

وفي هذا الفصل سوف ندرس طريقة آدوميان.

3.1.2 طريقة آدوميان Adomain deco

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \qquad (1)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u(t)dt \quad (2)$$

التعويض في قيمة 1 في 2 نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} u(t)dt$$

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = f(x) + \lambda \int k(x,t)(u_0(x) + u(x) + u_2(x) + \cdots)dt$$

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_1(x) = \lambda \int k(x,t)u_0(t)dt$$

$$u_2(x) = \lambda \int k(x,t)u_1(t)dt$$

$$\vdots$$

$$u_{+1}(x) = \lambda \int k(x,t)u_k(t)dt \qquad ; \quad k \geq 0$$

4.1.2 الصيغة التكرارية لطريقة آدوميان:

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_{k+1}(x) = \lambda \int k(x,t)u_k(t)dt$$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

وفي حالة التكامتفاضلية

$$u''(x) = f(x)\lambda \int k(x,t)u(t)dt \quad , \; u(0) = a_0 \; , \; u'(0) = a_1$$

"وهذا غير مطلوب في هذا الفصل"

حلل المعادلات الآتية:

$$1) \quad u(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt$$

الحل:

$$let\, u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt$$

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = 1 - \int_0^x (u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \cdots)dt$$

$$u_0(x) + f(x) \quad \Rightarrow u_0 = 1$$

$$u_1(x) = \lambda \int k(x,t)u_0(t)dt$$

$$u_k(x) = -\int_0^x u_k(t)dt \quad ; \quad k \geq 1$$

$$u_1(x) = -\int_0^x u_0(t)dt \; = -\int_0^x dt \; = -x$$

$$u_2(x) = -\int_0^x u_1(t)dt = -\int_0^x -t\,dt \; = \; \int_0^x -t\,dt \; = \frac{x^2}{2}$$

$$u_3(x) = -\int_0^x u_2(t)dt = -\int_0^x \frac{t^2}{2}dt = \frac{t^3}{6}\bigg|_0^x = \frac{-x^3}{3!}$$

$$u_4(x) = -\int_0^x u_3(t)dt = -\int_0^x \frac{t^3}{3!} = \frac{x^4}{4!}$$

$$\therefore u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -1^n \frac{x^n}{n!} = e^{-x}$$

$$u'(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt \quad ; \quad u(0) = 0$$

الحل:

بالتكامل الطرفين من 0 إلى x نجد أن:

$$u(x) - u(0) = x - \int_0^x \int_0^x u(t)\, dtdt$$

بالتحويل من تكامل متعدد إلى تكامل مفرد.

$$u(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$u_0(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u_0(x) = x$$

$$u_{k+1}(x) = -\int_0^x (x-t)\, u_k(t)dt$$

$$u_1(x) = -\int_0^x (x-t)t\; dt = -\int_0^x (xt - t^2)\; dt$$

$$= -\left(\frac{xt^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)_0^x = -\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{-x^3}{6} = \frac{x^3}{3!}$$

$$u_2(x) = -\int_0^x (x-t)\left(\frac{-t^3}{3!}\right)dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac{-t^3 - t^4}{3!}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3!}\left(\frac{xt^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right)_0^x$$

$$= \frac{1}{3!}\left(\frac{x^5}{4} - \frac{t^5}{5}\right) = \frac{1}{3!}.\frac{x^5}{20} = \frac{x^5}{5!}$$

$$\therefore u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{(2n+1)!} = sinx$$

$$3) \qquad u(x) = 1 + \int_0^x (t-x)u(t)dt$$

الحل:

$$u_0(x) = 1$$

$$u_1(x) = \int_0^x (t-x).1\; dt = \frac{x^2}{2}$$

$$u_2(x) = \int_0^x (t-x)\left(\frac{-x^2}{2}\right)dt = \frac{x^4}{4!}$$

$$\vdots$$

$$\therefore u(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = cosx$$

الاستنتاج

من خلال تحليل نتائج البحث يمكن استخلاص النقاط الآتية:

- تُعدّ طريقة آدوميان التفكيكية فعّالة جدًا في حل المعادلات التكاملية، وخاصة معادلات فوليترا.

● توفر الطريقة حلولًا دقيقة وسريعة التقارب مقارنة بالطرق الأخرى.

● لا تحتاج الطريقة إلى خطيّة المعادلة، مما يجعلها مناسبة للمعادلات الخطية وغير الخطية.

● تتميز بمرونة عالية تسمح بتطبيقها على أنواع متعددة من المعادلات التكاملية.

● أثبت التطبيق العملي نجاح الطريقة في تبسيط المعادلات وتحويلها إلى متسلسلة سهلة الحساب.

● تُعدّ طريقة آدوميان خيارًا واعدًا في مجالات النمذجة الرياضية والأنظمة الهندسية والديناميكية.

الخاتمة

أن المعادلات التكاملية تُعد أداة أساسية في نمذجة الظواهر العلمية، إلا أن حلّها analytically غالبًا ما يكون صعبًا، خاصة في المعادلات غير الخطية مثل معادلات فوليترا، وقد أثبتت طريقة آدوميان التفكيكية كفاءتها ومرونتها في تبسيط هذه المعادلات وتقديم حلول تقريبية دقيقة دون تعقيد أو افتراضات إضافية. كما أظهر التطبيق العملي على معادلات فوليترا قدرة الطريقة على تفكيك المعادلة إلى حدود قابلة للحساب بسهولة، مما يجعلها بديلاً قويًا للطرق التقليدية وداعمة لتطبيقات واسعة في المجالات الهندسية والفيزيائية.

المراجع

1. Abdul- Majid Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations, Methods and Applications, Springer, April 20, 2011.
2. Diogo, T; and Lima, P.(2008). Superconvegence of Collocation Method for class of weakly singular Volterra integral equations. Journalof Computational Applied Mathematics 307-316.
3. Mustafa, M.M.; Harbi, S(2013). Volterra interal Equations using non- Polynomial Spline functions, Baghdad University.
4. El-Kady, M., & El-Sayed, A. (2013). Fractional differentiation matrices for solving fractional order differential equations. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 84(2), 1–13.
5. Nieto, J. J., & Okrasinski, W. (1997). Existence, uniqueness, and approximation of solutions to some nonlinear diffusion problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 210(1), 231–240.
6. Olagunju, A. S., & Joseph, Folake L. (2013). Third-kind Chebyshev polynomials Vr(x) in collocation methods of solving boundary value problems. IOSR Journal of Mathematics, 7(2), 42–47.
7. Okrasinski, W., & Vila, S. (1998). Determination of the interface position for some nonlinear diffusion problems. Applied Mathematics Letters, 11(4), 85–89.
8. Das, Shantanu. (2011). Functional Fractional Calculus. Springer-Verlag, Heidelberg.DOI: 10.1007/978-3-642-20545-3
9. Zeilon, N. (1924). Sur quelques points de la théorie de l’équation intégrale d’Abel. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, 18, 1–19.