Comprehensive Journal of Science
Volume (11), Issue (41), (JUNE, 2026)
ISSN: 3014-6266

مجلة العلوم الشاملة
المجلد (11) العدد 41 يونيو 2026
ردمد: 3014-6266

تأثير تقنيات التكرار المُهيأة الجديدة على سرعة وكفاءة تقارب طريقة الاسترخاء المتتالي (SOR)

نعيمة إبراهيم عطيه الراجحي[1] , فادية مفتاح بنور حجاج[2]
قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة الزيتونة، ترهونة، ليبيا[1]
قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة الزيتونة، ترهونة، ليبيا[2]

The Effect of The new Preconditioned Iterative Techniques on The Speed and Efficiency of Convergence of The Successive Over Relaxation (SOR) Method

Naima Ibrahim Atya1, FADIA MIFTAH BANOUR HAJAJ[2]
[1]Mathematics Department, Faculty of Education, Azzaytuna University, Tarhuna, Libya
[2]Mathematics Department, Faculty of Education, Azzaytuna University, Tarhuna, Libya
naima8753@gmail.com[1], fadombhejaj@gmail.com[2]
https://orcid.org/0009-0003-3837-9140[1], https://orcid.org/0009-0008-1499-4081[2]

تاريخ الاستلام:2026/4/03 –تاريخ المراجعة:2026/05/3– تاريخ القبول: 2026/05/15– تاريخ النشر2026/06/03

الملخص

في اغلب المجالات العلمية كالتحليل العددي التي تهتم بالمعادلات الخطية التقليدية هناك بعض المسائل التي تتطلب في حلها معرفة بعض الطرق العددية للمنظومة الخطية, ويتم استخدام الطرق المباشرة لحل هذه المنظومة بسهولة إذا ما كان عدد المتغيرات ليس كبيرا, ولكن عندما تكون مصفوفات المعاملات كبيرة ومعقدة تصبح الطرق المباشرة التقليدية بطيئة وكثيرا ما تؤدي إلى حلول معقدة و تحتاج إلى وقت لتصل إلى حلها النهائي. في هذه الدراسة تم اقتراح طرق تكرارية حديثة لحل النظام الخطي $Ax = b$ للوصول الى حل سريع ومتقارب, ومن هذا الطرق تناولنا نبذة عن طرق جاكوبي وجاوس سيدل , ومن ثم درسنا طريقة الاسترخاء الفوقي المتتالي SOR وتحصلنا على تقنيات تكرارية جديدة لنصل إلى حل سريع للنظام الخطي, ومن خلال المناقشة والتحليل توصلنا إلى نوعين من التقنيات التكرارية المسبقة الشروط حيث كانت $\mathcal{B}_{\omega 1}$, $\mathcal{B}_{\omega 2}$ مصفوفات تكرارية جديدة مسبقة الشروط لطريقة الاسترخاء الفوقي المتتالي SOR . وعند اختبار أنصاف الأقطار الطيفية لهذه المصفوفات أعطى حلول سريعة و متقاربة , و أجرينا مقارنة بينهم ومن الأسرع , ومن خلال النتائج التحليلية أظهرت أن $\mathcal{B}_{\omega 1}$, $\mathcal{B}_{\omega 2}$ كانتا الأسرع من طريقة الاسترخاء الفوقي المتتالي التقليدية $\mathcal{B}_{\omega}$.

الكلمات المفتاحية : تقنيات تكرارية - مصفوفة تكرارية - مسبقة الشروط - نصف قطر الطيفي - طريقة الاسترخاء الفوقي المتتالي SOR - القيمة الذاتية - تقارب .

Abstract

In some scientific fields and numerical analysis, there are problems whose solution requires knowledge of certain numerical methods for linear systems. Direct methods can be used to solve such systems easily. However, when the coefficient matrices are large and complex, traditional direct methods become slow, often lead to complicated solutions, and require a long time to reach the final solution. This work proposes modern Iterative methods for solving Linear systems to achieve a fast and convergent solution. Among these methods, we briefly covered Jacobi and Gauss – Seidel methods, then studied the Successive Over Relaxation (SOR) method. We obtained new Iterative Techniques to reach a fast Solution for The linear System. Through discussion and analysis, we arrived at two types of Preconditioned Iterative techniques, where new Preconditioned Iteration matrices were developed for the Successive Over Relaxation method. When testing the spectral radius of these matrices, they gave fast and convergent Solutions. We compared them to see which was faster. The analytical results showed that both were faster than the traditional Successive Over Relaxation(SOR)method.

Keyword: Iterative Techniques - Iterative matrix - spectral radius - Successive Over Relaxation(SOR)method - Eigen value - Preconditioned - convergence.

1- المقدمة

الطرق التكرارية المتبعة لحل النظام الخطي أو المعادلات الخطية هي التي تبدأ بتقريب اولي (ابتدائي) ثم نتبع خوارزمية معينة تؤدي الى تقارب المتتابعات المستخدمة بطريقة أسرع , حتى نصل الى حل تقريبي للنظام الخطي يقربنا من القيمة المطلوبة و بصورة أفضل بإتباع هذه الطرق التكرارية (4) ,(3) ,(2) ,(1) . تُعدّ أنظمة المعادلات الخطية حجر الزاوية في نمذجة الظواهر العلمية والهندسية المعقدة، وتشكل محوراً أساسياً في بحوث التحليل العددي.(5) ومع التطور المتسارع في حجم البيانات وتعقيد النماذج الرياضية، برزت الحاجة الملحة إلى خوارزميات حل تتسم بالدقة والفعالية الحسابية. وعلى الرغم من أن الطرق المباشرة (Direct Methods) توفر حلاً نظرياً محدداً لهذه الأنظمة، إلا أن تطبيقها على المصفوفات الكبيرة والكثيفة أو ذات البنى المعقدة غالباً ما يواجه تحديات جسيمة. تتمثل هذه التحديات في التكلفة الحسابية الباهظة، والاستهلاك العالي للذاكرة، والزمن الطويل اللازم للوصول إلى الحل النهائي، مما يجعلها غير عملية في العديد من التطبيقات الحديثة (6).

وللتغلب على هذه القيود الهيكلية، لجأ الباحثون إلى البدائل الأكثر مرونة وكفاءة، ألا وهي الطرق التكرارية (Iterative Methods). ومن بين هذه المنهجيات، تبرز طريقة "جاكوبي" (Jacobi) وطريقة "غاوس-سايدل" (Gauss-Seidel) كخطوات تأسيسية، تليها طريقة "الاسترخاء المتتابع الزائد" (Successive Over-Relaxation - SOR)،(7) والتي تمثل تطوراً نوعياً يهدف إلى تسريع عملية التقارب من خلال إدخال معامل استرخاء مُحسّن. ومع ذلك، تبقى كفاءة طريقة SOR التقليدية رهينةً بخصائص مصفوفة المعاملات؛ حيث قد تعاني من بطء ملحوظ في التقارب، أو حتى فشله تماماً، خاصة في الأنظمة ذات الأعداد الشرطية العالية أو البنى المصفوفية غير المنتظمة. هنا تكمن الدافعية الرئيسية لهذا البحث، والتي تتجلى في البحث عن آليات رياضية متطورة لتعزيز أداء طرق الحل التكرارية وتجاوز محدودياتها. ومن هذا المنطلق، يطرح هذا العمل تقنيات تكرارية جديدة ذات معالجة مسبقة (New Preconditioned Iterative Techniques)، مصممة خصيصاً لتسريع حل الأنظمة الخطية (8). تعتمد هذه المقاربة المبتكرة على تطوير مصفوفات تكرارية جديدة مشروطة مسبقاً (Preconditioned Iteration Matrices)، يتم دمجها ضمن الإطار الرياضي لطريقة SOR، بهدف تحسين الخصائص الطيفية للنظام وتعديل توزيع القيم الذاتية (Eigenvalues) بما يخدم تسريع التقارب. يهدف هذا البحث بشكل رئيسي إلى دراسة وتحليل تأثير هذه التقنيات التكرارية ذات المعالجة المسبقة الجديدة على سرعة وكفاءة تقارب طريقة SOR. وسيتم تحقيق ذلك من خلال تحليل رياضي دقيق لنصف القطر الطيفي (Spectral Radius) لمصفوفات التكرار المقترحة (9)، حيث يُعدّ تقليل هذا النصف القطري المؤشر الحاسم والأكثر موثوقية على تحسين معدل التقارب. ومن خلال المقارنة التحليلية والعددية، يسعى هذا العمل إلى إثبات تفوق هذه التقنيات الحديثة على طريقة SOR التقليدية (10)، مما يفتح آفاقاً جديدة لحل الأنظمة الخطية الكبيرة بفعالية وموثوقية أعلى. سيتم تنظيم بقية هذا البحث على النحو التالي: يستعرض القسم التالي المفاهيم الأساسية والطرق التكرارية التقليدية، يليه قسم مخصص لصياغة رياضية دقيقة وتطوير تقنيات المعالجة المسبقة الجديدة المدمجة مع طريقة SOR. بعد ذلك، سيتم تقديم التحليل النظري لنصف القطر الطيفي وإثباتات التقارب، مختتماً بنتائج عددية وتطبيقية توضح المقارنة العملية من حيث السرعة والكفاءة بين الطرق المقترحة والطريقة التقليدية.

فلإيجاد حل النظام الخطي

$$Ax = b \qquad (1)$$

حيث أن $A = [a_{ij}]$ هي مصفوفة حقيقية غيرشاذة ذو قيم معلومة من نوع $n \times n$ تسمى "مصفوفة المعاملات " ,$b =$ $[b_{ij}]$ هو متجه حقيقي معلوم القيم من نوع $n \times 1$, $x = [x_i]$ هو متجه المجاهيل الحقيقي من نوع $n \times 1$. وإذا كانت

$\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ هي مجموعة جميع المصفوفات من النوع $n \times n$, $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ هي مجموعة جميع المتجهات الحقيقية ذات البعد $n \times 1$ حيث يرمز $x^n \in \mathbb{R}^n$ وأنه الحل الوحيد للمعادلة (1).

فإنه عند بناء الطرق التكرارية الثابتة لحل النظام الخطي (1) تتمثل الفكرة الأساسية في تجزئة مصفوفة المعاملات $A \in \mathcal{M}_n$ كالتالي :

$$A = M - N \tag{2}$$

حيث أن M , N مصفوفتين غير شاذتين , وبالتالي فإن النظام الخطي $Ax = b$ يكافئ النظام الخطي $(M - N)x = b$ أو $Mx = Nx + b$ ومنهما نحصل على :

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \tag{3}$$

وإذا فرضنا $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ فإن المعادلة (3) تكافئ في حلها :

$$x^{(k)} = M^{-1}Nx^{(k-1)} + M^{-1}b \ , \quad (k = 1,2,3 \dots \dots . . n) \tag{4}$$

حيث أن $\mathscr{B} = M^{-1}N$ هي مصفوفة التكرار , و $c = M^{-1}b$ متجه التكراري . وبذلك تكون مصفوفة الطرق التكرارية الثابتة هي :

$$x^{(k)} = \mathcal{B}x^{(k-1)} + c \ \ , (k = 1,2,3 \dots \dots . . n) \tag{5}$$

ملاحظة :

بالنسبة لمصفوفة المعاملات $A \in \mathcal{M}_n$ للنظام الخطي $Ax = b$ هي عبارة عن تجزئة بالصورة التالية :

$$A = D - L - U$$

حيث أن $D(diagonal)$ مصفوفة قطرية و $L\ (strictiy\ lower\ triangular)$ مصفوفة مثلثية سفلية و $U\ (strictiy\ upper\ triangular)$ مصفوفة مثلثية علوية .

2- تقنيات جاكوبي و جاوس سيدل وSOR التكرارية

تعتبر طريقتي جاكوبي و جاوس سيدل من الطرق التقليدية القديمة التي تستخدم لحل الأنظمة الخطية ذات الأبعاد الصغيرة لأن الوقت اللازم للحصول على دقة كافية يتجاوز الوقت المطلوب لتقنيات التكرار المباشرة ومع ذلك فإنه بالنسبة للأنظمة الكبيرة ذات الأبعاد العالية من المدخلات الصفرية , فإن هذه التقنيات فعالة من حيث تخزين الحاسوب و الحساب .[(6)R. L. Burden , page 450]

إذا فرضنا أن D , L , U مصفوفات غير شاذة و لدينا مصفوفات تكرارية لطرق جاكوبي و جاوس سيدل و SOR (طريقة الاسترخاء) وهي $\mathcal{B}_\omega, \mathcal{B}_{GS}, \mathcal{B}_J$ على النحو التالي :

$$\mathcal{B}_J = D^{-1}(L + U) \qquad \text{و} \qquad \mathcal{B}_{GS} = (D - L)^{-1}U$$

$$\mathcal{B}_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$$

نظرية 1: [6]

لأي $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ متجه ابتدائي فإن المتتابعة المعرفة $\{x^{(k)}\}_{\mathrm{k}=0}^{\infty}$ نحصل عليها من :

$$x^{(k)} = \mathcal{B}x^{(k-1)} + c \quad , \ \mathrm{k} = 1,2,3 \ldots \ldots \mathrm{n}$$

حيث أن $x = \mathcal{B}x^{(0)} + c$ يقترب من الحل الوحيد $x = A^{-1}b$ اذا وفقط اذا كان $\rho(\mathcal{B}) < 1$

ولقد رأينا أن طرق التكرارية لجاكوبي و جاوس سيدل وطريقة الاسترخاء SOR يمكن كتابتها على الصورة:

$$x^{(k)} = \mathcal{B}_J x^{(k-1)} + c$$

$$x^{(k)} = \mathcal{B}_{GS} x^{(k-1)} + c$$

$$x^{(k)} = \mathcal{B}_\omega x^{(k-1)} + c$$

فإذا كانت $\rho(\mathcal{B}_J) < 1$ و $\rho(\mathcal{B}_{GS}) < 1$ و $\rho(\mathcal{B}_\omega) < 1$ هذا يعني أن المتتابعة $\{x^{(k)}\}_{\mathrm{k}=0}^{\infty}$ سوف تكون متقاربة الى الحل x في النظام الخطي $Ax = b$.

فعلى سبيل المثال في طريقة جاكوبي : $x^{(k)} = D^{-1}(L + U)x^{(k-1)} + D^{-1}b$

وإذا كانت المتتابعة $\{x^{(k)}\}_{\mathrm{k}=0}^{\infty}$ تتقارب الى x فإن

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

وهذا يعني أن :

$$Dx = (L + U)x + b$$

$$(D - L - U)x = b$$

ومن خلال أن $A = (D - L - U)$ مصفوفة غير شاذة فإن الحل x يحقق $Ax = b$.

3- بعض أنواع المصفوفات التي يمكن استخدامها لتطبيق الطرق التكرارية الثابتة والمسبقة الشروط

تعريف 1: [10] .

لأي $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $n \times n$ تسمى Strictly Diagonally Dominant (SCDD) اذا كان لكل $i = 1,2,3, \ldots \ldots n$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad (6)$$

تعريف 2 [2]

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $n \times n$ فإن A تكون من النوع $Z - Matrix$ اذا كان $a_{ij} \leq 0$ حيث أن $i, j =$ $1,2,3, \ldots \ldots n$ لكل $i \neq j$, و تكون من النوع $L - \ Matrix$ إذا كان $a_{ii} \leq 0$ حيث أن $i = 1,2,3, \ldots \ldots n$ وكان $a_{ij} \leq 0$ حيث أن $i, j = 1,2,3, \ldots \ldots n$ لكل $i \neq j$,

وتكون من النوع $M - Matrix$ إذا كانت A تأخذ الشكل $A = rl - k$ حيث أن $k \geq 0$ و $r \geq p(k)$

تعريف 3 [5]

لأي A مصفوفة من النوع $n \times n$ وتكون $A \in \mathcal{M}_n$ إذا وفقط إذا كانت $a_{ij} \leq 0$ لكل $i, j = i \neq j$
$1,2,3, \dots \dots n$ عندئذ تكون A مصفوفة غير شاذة و $A^{-1} \geq 0$.

4- النصف القطر الطيفي في النظام الخطي The Spectral Radius in The Linear System

تعريف 4 [6]

نصف القطر الطيفي $\rho(A)$ للمصفوفة A يعرف على أنه : $\rho(A) = \max|\lambda|$
حيث λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A .

نتيجة 1 [6]

إذا كانت A مصفوفة من نوع $n \times n$ وكان $\rho(A)$ نصف قطرها الطيفي أي أن :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in sp(A)\}$$

إذا وفقط إذا كان

1- $\rho(A) < 1$.

2- $\{A^n\}_{n \geq 0}$ متقاربة للـ 0 في $\mathcal{M}_n$.

3 - $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ متقاربة في $\mathcal{M}_n$.

ويرتبط نصف القطر الطيفي ارتباطا وثيقا بمعيار المصفوفة , كما توضح لنا النظرية التالية

نظرية 2 [6]

إذا كانت A مصفوفة من نوع $n \times n$ فإن :

1- $||A||_2 = [\rho(A^t . A)]^{\frac{1}{2}}$

2- $\rho(A) \leq ||A||$ لأي معيار مصفوفة

5- طرق تكرارية مسبقة الشروط الجديدة

تتضح أهمية نصف القطر الطيفي في حالة التقارب لحل النظرية (1) بشكل تقريبي كلما كان نصف القطر الطيفي أصغر كان تقارب الطريقة التكرارية أسرع , ويمكننا تحويله إلى نظام خطي مكافئ مسبق الشروط :

$$PAx = Pb$$

$$\widetilde{A}\, x = \tilde{b}$$

حيث أن $P \in \mathcal{M}_n$ مصفوفة مسبقة الشروط الجديدة غير شاذة , وأن $\widetilde{A} = PA$ و $\tilde{b} = Pb$ لذا نحتاج الى بناء $\widetilde{A}$ مسبقة الشروط بطريقة تجعل $\rho(\widetilde{\mathcal{B}}) < \rho(\mathcal{B}) < 1$, و بالتالي تحقق تقارب أسرع الى الحل المطلوب x^* أو بشكل مكافئ له , وتقليل عدد التكرارات . وبذلك نقترح مصفوفة P مسبقة الشرط الجديدة من الشكل :

$$P = (I + P_w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w & w & \cdots & w & w & w & \cdots & w & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

حيث w هو المعامل الذي سيتم تحديده و وضعه في احد صفوف المصفوفة .

ومن خلال البنية التمهيدية للمصفوفة P_w فإن مصفوفة المعاملات A للنظام الخطي $Ax = b$ و مصفوفة المعاملات P_wA للنظام الخطي المسبق الشرط $P_wAx = P_wb$. تختلفان فقط في الصف الذي يحتوي على المعامل w و بذلك سيكون تركيزنا على الصفوف التي تحوي هذا المعامل في مصفوفة المعاملات A , P_wA.

لاحظ أن المصفوفة P مسبق الشرط $P = (I + P_w)$ تكون أكثر عمومية من المصفوفة (7) .

$$\widetilde{A}\, x = \tilde{b}$$

$$PAx = Pb$$

وبذلك فإن :

$$(I + P_w)\, Ax = P_wb$$

$$\widetilde{A} = (I + P_w)(I - L - U)$$

$$= I - L - U + P_w - P_wL - P_wU$$

$$= I - L - U - L_P - U_P + D_1 - L_1 - U_1$$

حيث إن :

$$-P_wL - P_wU = -L_P - U_P \quad , \quad P_w = D_1 - L_1 - U_1$$

وبذلك

$$\tilde{A} = (I + D_1) - (L + L_P + U_1) - (U + U_P + U_1)$$

$$\tilde{A} = \widetilde{D} - \tilde{L} - \widetilde{U}$$

حيث أن $\widetilde{D} = (I + D_1)$ مصفوفة قطرية و $\tilde{L} = (L + L_P + U_1)$ و $\widetilde{U} = (U + U_P + U_1)$ هما الجزئيين المثلثين السفلي و العلوي على التوالي للمصفوفة $\tilde{A}$. وعند استخدام معامل الاسترخاء ω على النظام الخطي المهيأ مسبقاً في المصفوفة (7) نحصل على :

$$\omega\widetilde{A}\, x = \omega\tilde{b}$$

$$\omega\widetilde{A} = \omega\big(\widetilde{D} - \tilde{L} - \widetilde{U}\big)$$

$$= \omega\tilde{D} - \omega\tilde{L} - \omega\tilde{U}$$

$$= \tilde{D} - \tilde{D} + \omega\tilde{D} - \omega\tilde{L} - \omega\tilde{U}$$

$$= \left(\tilde{D} - \omega\tilde{L}\right) - (1-\omega)\tilde{D} - \omega\tilde{U}$$

$$\omega\tilde{A} = \left(\tilde{D} - \omega\tilde{L}\right) - [(1-\omega)\tilde{D} + \omega\tilde{U}]$$

و بنفس أسلوب التفكيك للمصفوفة الأصلية $\omega\tilde{A} = M - N$ حيث أن :

$$M = \left(\tilde{D} - \omega\tilde{L}\right) \;\;,\;\; N = [(1-\omega)\tilde{D} + \omega\tilde{U}]$$

و بذلك يمكن تعريف مخطط تكراري لطريقة الاسترخاء SOR على النحو التالي (9) :

$$\omega\tilde{A}\, x = \omega\tilde{b}$$

$$\left[\left(\tilde{D} - \omega\tilde{L}\right) - \left[(1-\omega)\tilde{D} + \omega\tilde{U}\right]\right] x = \omega\tilde{b}$$

$$(M - N)x = \omega\tilde{b}$$

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}(\omega\tilde{b})$$

ومنها نحصل على الصيغة التكرارية الأولى :

$$x^{(k)} = \mathcal{B}_{\omega 1} x^{(k-1)} + \mathrm{c} \tag{8}$$

حيث أن

$$\mathcal{B}_{\omega 1} = M^{-1}N = \left(\tilde{D} - \omega\tilde{L}\right)^{-1}\left[(1-\omega)\tilde{D} + \omega\tilde{U}\right]$$

وهذا سيكون **التقنية الأولى** لتقارب الطرق التكرارية المسبقة الشروط الجديد لمصفوفة الاسترخاء SOR . والخيارات المختلفة لـ N , M يؤدي الى طرق تكرارية ثابتة مختلفة بحيث أن $0 < \omega < 1$.

ويمكن الحصول على صيغة أخرى لاستخدام معامل الاسترخاء ω على النظام الخطي المشروطة في المصفوفة *(8),* , *(9),* (7) مع تغير في التجزئة $\omega\tilde{A} = M - N$ بحيث :

$$\omega\tilde{A} = \omega\left(\tilde{D} - \tilde{L} - \tilde{U}\right)$$

$$= \omega(I + D_1) - \omega\tilde{L} - \omega\tilde{U}$$

$$= I - \omega\tilde{L} - I + \omega(I + D_1) - \omega\tilde{U}$$

$$= I - \omega\tilde{L} - I + \omega I + \omega D_1 - \omega\tilde{U}$$

$$= \left(I - \omega\tilde{L}\right) - (1-\omega)I - \omega(\tilde{U} - D_1)$$

$$\omega\tilde{A} = \left(I - \omega\tilde{L}\right) - \left[(1-\omega)I + \omega(\tilde{U} - D_1)\right]$$

وبذلك نتحصل على تجزئة مصفوفة المعاملات المشروطة $\omega\tilde{A} = M - N$ حيث أن :

$$M = \left(I - \omega\tilde{L}\right) \;\;,\;\; N = [(1-\omega)I + \omega(\tilde{U} - D_1)]$$

و منها يمكن تعريف الصيغة التكرارية المسبقة الشروط لطريقة الاسترخاء SOR يكون على النحو التالي :

$$\omega\tilde{A}\, x = \omega\tilde{b}$$

$$\left[\left(I - \omega\tilde{L}\right) - \left[(1-\omega)I + \omega(\tilde{U} - D_1)\right]\right] x = \omega\tilde{b}$$

$$(M-N)x=\omega\tilde{b}$$
$$x=M^{-1}Nx+M^{-1}(\omega\tilde{b})$$

ونحصل على الصيغة التكرارية الثانية :

$$x^{(k)}=\mathcal{B}_{\omega 2}x^{(k-1)}+\mathrm{c} \tag{9}$$

حيث أن $\mathcal{B}_{\omega 2}=M^{-1}N=\left(I-\omega\tilde{L}\right)^{-1}\left[(1-\omega)I+\omega(\tilde{U}-D_1)\right]$

وهذه ستكون **التقنية الثانية** لاختبار التقارب لطريقة الاسترخاء SOR , والخيارات لـ $N\,,M$ يؤدي الى طرق تكرارية ثابتة مختلفة بحيث أن $0<\omega<1$.

6- تحليل التقارب

في هذا الجزء سنقوم بإثبات التقارب للصيغ التكرارية الجديدة (8),(9) من خلال اختبار نصف القطر الطيفي $\rho(\mathcal{B}_\omega)$ لمصفوفة $\mathcal{B}_{\omega 2}\,,\,\mathcal{B}_{\omega 1}$ فيجب أن يكون اقل من واحد في كل حالة .

مبرهنة 1 [. R. S. Varga (7)]

لأي مصفوفة A غير قابلة للاختزال من النوع $n\times n$ بحيث $A\geq 0$ فإن :

1- نصف القطر الطيفي $\rho(\mathcal{B})$ هو قيمة ذاتية بسيطة لـ A .

2- A لها قيمة ذاتية حقيقية موجبة تساوي نصف قطرها الطيفي $\rho(\mathcal{B})$.

3- يوجد متجه ذاتي $x>0$ مقابل لتلك القيمة الذاتية .

4- يزداد نصف القطر الطيفي إذا زاد أي مدخل من مداخل A .

مبرهنة 2 [4]

إذا كانت $\mathcal{B}=M^{-1}N$ تجزئة لـ $M\,,N$ من المصفوفة A , فإن التجزئة تكون متقاربة أي أن $\rho(M^{-1}N)<1$ اذا وفقط إذا كانت $M^{-1}N\leq 0$ و A مصفوفة غير شاذة من نوع M-matrix .

نظرية 3 [3]

إذا كانت A مصفوفة متماثلة و موجبة فإن نصف القطر الطيفي $\rho(\mathcal{B}_\omega)<1$ لكل قيم معامل الاسترخاء ضمن المجال $0<\omega<1$, وبذلك طريقة الاسترخاء SOR تقترب لجميع قيم $x^{(0)}$. واذا وضع $\omega=1$ تتحول لطريقة جاوس سيدل التي تتقارب بالمثل .

نظرية 4 [9]

إذا كان معامل الاسترخاء $\omega\in\mathbb{R}$ فإن $\rho(\mathcal{B}_\omega)<|1-\omega|$

البرهان

عند أخذ محدد المصفوفة $\mathcal{B}_{\omega 1}$ نحصل على (7):

$$dat(\mathcal{B}_{\omega 1})=\det\left[\left(\tilde{D}-\omega\tilde{L}\right)^{-1}.\left[(1-\omega)\tilde{D}+\omega\tilde{U}\right]\right]$$

$$= det\ \left[\left(\widetilde{D} - \omega\widetilde{L}\right)^{-1}\right].det\left[(1-\omega)\widetilde{D} + \omega\widetilde{U}\right]$$

وبما أن المصفوفات هنا مثلثية فإن محدداتها تساوي حاصل ضرب مدخلاتها القطرية و بالتالي لدينا :

$$dat(\mathcal{B}_{\omega 1}) = (1-\omega)^n$$

و محدد $\mathcal{B}_{\omega 1}$ يساوي أيضا حاصل ضرب قيمها الذاتية و يترتب على ذلك أن قيمة ذاتية واحدة على الأقل من القيم الذاتية يجب ان تكون قيمتها المطلقة أكبر من أو تساوي $|1-\omega|$.

مبرهنة 3 [6]

إذا كان النصف القطر الطيفي $\rho(\mathcal{B}) < 1$ فإن $(I-\mathcal{B})^{-1}$ موجودة و أن :

$$(I-\mathcal{B})^{-1} = \mathrm{I} + \mathcal{B} + \mathcal{B}^2 + \cdots \ldots . = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}^i$$

نظرية 5 [8]

إذا كانت $\mathcal{B}_\omega = (I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I + \omega U]$ مصفوفة تكرارية لطريقة الاسترخاء بينما

$$\mathcal{B}_{\omega 1} = \left(\widetilde{D} - \omega\widetilde{L}\right)^{-1}\left[(1-\omega)\widetilde{D} + \omega\widetilde{U}\right]$$

$$\mathcal{B}_{\omega 2} = \left(I - \omega\widetilde{L}\right)^{-1}\left[(1-\omega)I + \omega(\widetilde{U} - D_1)\right]$$

هما تقنيتان تكراريتان مسبقتي الشروط جديدتان لطريقة الاسترخاء الفوقي المتتالي , وإذا كانت A مصفوفة غير قابلة للاختزال من نوع *M- Matrix* مع وجود شرطين $0 \le a_{1,i}a_{i,1} + a_{i,i+1}a_{i+1,i} < 1$ لكل $i = 2,3, \ldots . . n$ و $0 <$ $\omega < 1$ فإن $\mathcal{B}_{\omega 2}$ و $\mathcal{B}_{\omega 1}$ و $\mathcal{B}_\omega$ تكون مصفوفات غير قابلة للاختزال وغير سالبات .

البرهان

بما إن A مصفوفة من نوع *M-Matrix* و $L \ge 0\ , U \ge 0$ عندها :

$$(I-\omega L)^{-1} = I + \omega L + \omega^2 L^2 + \cdots \ldots \ldots . . + \omega^{n-1}L^{n-1} \ge 0$$

$$(1-\omega)I + \omega U \ge 0$$

وهذا يعني أن $\mathcal{B}_\omega = (I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I + \omega U] \ge 0$ لكل $0 < \omega < 1$ ومنها فإن $\mathcal{B}_\omega$ مصفوفة غير سالبة و بذلك فإن $\mathcal{B}_{\omega 2}\ , \mathcal{B}_{\omega 1}$ أيضا غير سالبات .

نتيجة 2 [8]

لتكن $\mathcal{B}_{GS} = (1-L)^{-1}U$ مصفوفة تكرارية لغاوس سايدل و $\mathcal{B}_{PGS} = \left(\widetilde{D} - \widetilde{L}\right)^{-1}\widetilde{U}$ مصفوفة تكرارية مسبقة الشرط لجاوس سيدل , و كانت A مصفوفة غير قابلة للاختزال ومن نوع M- Matrix

مع وجوب $0 \le a_{1,i}a_{i,1} + a_{i,i+1}a_{i+1,i} < 1$ لكل $i = 2,3, \ldots . . n$ فإن :

1- $\rho(\mathcal{B}_{PGS}) < \rho(\mathcal{B}_{GS})\ ,\ \ if\ \rho(\mathcal{B}_{GS}) < 1$

2- $\rho(\mathcal{B}_{PGS}) = \rho(\mathcal{B}_{GS})\ \ ,\ if\ \ \ \rho(\mathcal{B}_{GS}) = 1$

3- $\rho(\mathcal{B}_{PGS}) > \rho(\mathcal{B}_{GS})\ ,\ \ if\ \rho(\mathcal{B}_{GS}) > 1$

7- النتائج العددية

من خلال ما توصلنا إليه من تقنيات تكرارية مسبقة الشروط الجديدة لحل النظام الخطي سنقوم بمقارنة هذه التقنيات و معرفة أي منها متقارب و أسرع للحل . وهنا لبعض المسائل .

مثال 1 :

إذا أخذنا المصفوفة A بالشكل :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 & -0.3 \\ -0.4 & 1 & -0.5 & -0.1 \\ -0.3 & -0.2 & 1 & -0.1 \\ -0.2 & -0.1 & -0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

في هذا المثال نستخدم طرق تكرارية مسبقة الشروط الجديدة للمصفوفة $SCDD$ و مصفوفة M-Matrix مع تغيير الصفوف في كل حالة (صف واحد و جميع الصفوف) ونقارن أنصاف الأقطار الطيفية $\rho(\mathcal{B})$ لمصفوفات التكرارية $\mathcal{B}_{P\omega}$ و $\mathcal{B}_J$ و $\mathcal{B}_{GS}$. من خلال الجدول (1) نلاحظ أن المصفوفات التكرارية المسبقة الشروط الجديدة تعطي $\mathcal{B}_{GS}$ نتائج أفضل من $\mathcal{B}_J$ و $\mathcal{B}_{P\omega}$ طريقة الاسترخاء الفوقي المتتالي SOR المسبقة الشروط الجديدة. والجدول التالي يبين نتيجة ذلك *(16), (17), (18), (19),(20)*.

Table 1:

Row	$\rho(\mathcal{B}_{GS})$	$\rho(\mathcal{B}_J)$	$\rho(\mathcal{B}_{P\omega})$
w_1	0.32356	0.59496	0.94323
w_2	0.38801	0.63334	0.96214
w_3	0.31356	0.5744	0.95608
w_4	0.3782	0.62604	0.96136
All w	0.1412	0.42441	0.94121

مثال 2 :

بنفس قيم المثال السابق لمصفوفة المعاملات A *(10).* هنا نقارن انصاف الأقطار الطيفية للمصفوفات $\mathcal{B}_{\omega2}$,$\mathcal{B}_{\omega1}$,$\mathcal{B}_{\omega}$ لبعض قيم معامل الاسترخاء ω , حيث اظهرت لنا النتائج التحليلية أن $\mathcal{B}_{\omega2}$,$\mathcal{B}_{\omega1}$ لهما تقارب اسرع من $\mathcal{B}_{\omega}$, حيث أن $0<\omega<1$. وكانت النتائج كما هي موضحة في الجدول (2) التالي :

Table 1:

ω	$\rho(\mathcal{B}_{\omega})$	$\rho(\mathcal{B}_{\omega1})$	$\rho(\mathcal{B}_{\omega2})$
0.1	0.96562	0.94293	0.94124
0.3	0.88818	0.81289	0.81288
0.5	0.79590	0.66802	0.66802
0.7	0.68199	0.49918	0.49919
0.9	0.53202	0.28804	0.28804

نتيجة 3:

لتكن $\mathcal{B}_{\omega} = (I - \omega L)^{-1}[(1-\omega)I + \omega U]$ مصفوفة تكرارية لطريقة الاسترخاء الفوقي المتتالي SOR , و
$\mathcal{B}_{\omega 2} = \left(I - \omega\tilde{L}\right)^{-1}\left[(1-\omega)I + \omega(\tilde{U} - D_1)\right]$ مصفوفة تكرارية مسبقة الشروط الجديدة لطريقة SOR , ,
(12), (11), (13), (14), (15) وكانت A مصفوفة غير قابلة للاختزال من نوع M- Matrix مع وجوب لكل $i =$
$2,3, \ldots .n$ $0 \le a_{1,i}a_{i,1} + a_{i,i+1}a_{i+1,i} < 1$ فإن :

1- $\rho(\mathcal{B}_{\omega 2}) < \rho(\mathcal{B}_{\omega})$, if $\rho(\mathcal{B}_{\omega}) < 1$
2- $\rho(\mathcal{B}_{\omega 2}) = \rho(\mathcal{B}_{\omega})$, if $\rho(\mathcal{B}_{\omega}) = 1$
3- $\rho(\mathcal{B}_{\omega 2}) > \rho(\mathcal{B}_{\omega})$, if $\rho(\mathcal{B}_{\omega}) > 1$

8- الاستنتاجات

في هذا العمل , قدمنا تقنية مسبقة الشروط جديدة لطريقة الاسترخاء SOR لحل النظام الخطي $Ax = b$, استخدمنا شكلين مختلفين للتقنية الجديدة $\mathcal{B}_{\omega 2}$, $\mathcal{B}_{\omega 1}$ وهما نوعان من التقنيات التكرارية المسبقة الشروط لطريقة الاسترخاء SOR . ولقد أثبتنا أن أنصاف الأقطار الطيفية للمصفوفات التكرارية المسبقة الشروط أسرع تقارب من المصفوفة التكرارية التقليدية لطريقة الاسترخاء SOR إذا كان معامل الاسترخاء $0 < \omega < 1$, و بذلك نستنتج أن الطرق التكرارية المسبقة الشروط الجديدة لطريقة الاسترخاء لها خصائص تقارب أسرع من الطريقة التكرارية التقليدية لـSOR . ومن خلال هذه النتائج نلاحظ مدة أهمية تطوير التقنيات التكرارية جديدة لطرق الحل في النظام الخطي أو منظومة المعادلات الخطية لوصول الى حلول سريع وجودة عالية في التقارب .

المراجع

[1] عمران قوبا – الجبر – الجزء الثاني – من منشورات المعهد العالي للعلوم والتكنولوجيا – الجمهورية السورية 2017 م .

[2] Usui, M., Niki, H., & Kohno, T. (1994). Adaptive Gauss-Seidel method for linear systems. *International Journal of Computer Mathematics*, *51*(1-2), 119-125.

[3] Demmel, J. W. (1997). *Applied numerical linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[4] Li, W., & Sun, W. (2000). Modified Gauss–Seidel type methods and Jacobi type methods for Z-matrices. *Linear Algebra and its Applications*, *317*(1-3), 227-240.

[5] Hadjidimos, A. (2000). Successive overrelaxation (SOR) and related methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *123*(1-2), 177-199.

[6] Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Interpolation & Polynomial Approximation Lagrange Interpolating Polynomials I.

[7] Varga, R. S. (1999). *Matrix iterative analysis* (Vol. 27). Springer Science & Business Media.

[8] Ndanusa, A., & Adeboye, K. R. (2012). Preconditioned SOR iterative methods for L-matrices.

[9] Anne Greenbaum, Iterative Methods for Solving Linear Systems, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1997.

[10] Stoer, J., Bulirsch, R., Bartels, R., Gautschi, W., & Witzgall, C. (1980). *Introduction to numerical analysis* (Vol. 1993). New York: Springer.

[11] Hawa Ahmed Alrawayati, Ümit Tokeşer. (2025).Spectral Integral Variation of Graph Theory. Asian Journal of Mathematics and Computer Research.32, Issue, 2. Pages(151-160). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=82163806

[12] Alrawayati, H., & Tökeşer, Ü. (2021). PARKINSON'S DISEASE DIAGNOSIS BASED ON THE CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK AND PARTICLE SWARM OPTIMIZATION ALGORITHM. *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*, *28*(1), 26-37.

[13] Hawa Ahmed Alrawayati, Ümit Tokeşer. (2025).Spectral Integral Variation of Graph Theory. Asian Journal of Mathematics and Computer Research.32, Issue, 2. Pages(151-160). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=82163806.

[14] Hawa Alrawayati (2020). Development of High Efficiency Optimization Algorithm based on New Topology in Particle Swarm Optimization for Parkinson's Disease. IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM). 8

[15] Louka, M. A., & Missirlis, N. M. (2026). The Block Preconditioned SOR Method for Solving Indefinite Complex Linear Systems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, *33*(1), e70068.

[16] Abdullahi, R., Barde, N. S., Dantala, A., Abdullahi, I., & Ndanusa, A. (2025). Enhancing the convergence rate of a preconditioned accelerated overrelaxation method for large sparse linear algebraic systems via a third-level refinement strategy. *Science World Journal*, *20*(3), 1199-1202.

[17] Tavakoli, R. (2025). Parallelizing Sequential Sweeping on Structured Grids--Parallel SOR/ILU preconditioners for Structured n-Diagonal Matrices. *ILU preconditioners for Structured n-Diagonal Matrices*.

[18] Daniel, E. E., Oyewole, D. O., Akinwunmi, S. A., & Awudang, D. B. (2025). COMPARATIVE ANALYSIS OF GAUSS SEIDEL, CONJUGATE GRADIENT AND SUCCESSIVEOVER RELAXATION FOR THE SOLUTION OF NONSYMETRIC LINEAR EQUATIONS. *FULafia Journal of Science and Technology*, *9*(1), 1-6.

[19] Kafu, N. A. (2025). The strategies of improvement the Performance for the Jacobi method using Gaussian iterative methods. *مجلة العلوم الشاملة*, *10*1556-1542 ,(38 ملحق).

[20] Liang, Z. Z., & Tan, X. K. (2026). On generalized successive overrelaxation method for a class of block three-by-three double saddle point problems: Z.-Z. Liang et al. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, *43*(1), 11.